# Комплексные числа и функции комплексного переменного

## 1. Понятие комплексного числа

Опр: Выр-е вида $z = x + iy$, где $x, y$ - действ. числа, $i$ - мнимая единица, наз-ся - комплексными числами

Замечание: Комплексные числа будут выр-ся в различных формах. Форма, в определении наз-ся алгебраической формой комплексного числа

Опр: Число $x$ в комплексном числе $z = x + iy$ наз-ся действит. частью $Rz$ и обозначается $Re\,z = x$

Опр: число $y$ в $Rz$ $z = x + iy$ наз-ся мнимой частью $z$ и обозначается $Im\,z = y$

Рассмотрим геометрическую форму записи Кч каждому Кч $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку в системе координат ОXY, наз-ся комплексной плоскостью

Ч.Д. Такой способ задания Кч наз-ся


Такой способ задания КЧ наз-ся геометрическим

Опр: Длина радиус-вектора $OM$ наз-ся модулем к.ч. $z$ и обозначается $|z|$, который равен

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Опр: Угол $\varphi$ радиус-вектором $OM$ с осью $Ox$ наз-ся аргументом к.ч. и обозначается $Arg\, z$

Замечание: $Arg\, z$ - определяется неоднозначно с точностью до угла кратного $2\pi$, можно записать что:

$$Arg\, z = arg\, z + 2\pi k, \quad k \in Z,$$ где

$arg\, z$ - главное значение аргумента, который находится $-\pi < arg\, z \le \pi$

Используя понятия модуля и аргумента к.ч. можно записать к.ч. в тригонометрической форме:

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi \qquad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\varphi = Arg\, z$$

~~4=...~~ Очень часто модуль(z) заменяют $\rho$ $\Rightarrow$

$\boxed{z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ - тригонометр. форма

Сущ-ет ещё одна форма записи КЧ наз-ся показательной формой КЧ

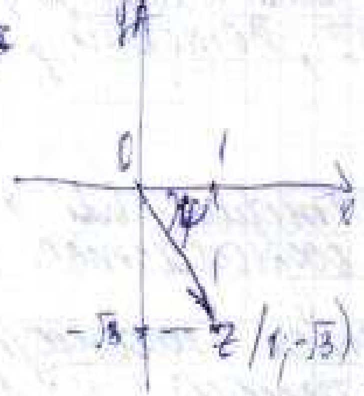
где $z=\rho e^{i\varphi}$ (для понима. этой формы нужно определять

| N | Форма z | Формула |
|---|---|---|
| 1 | Алгебраическая | $z=x+iy$ |
| 2 | Геометрическая | $z=(x;y)$ |
| 3 | Тригонометрич | $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ |
| 4 | Показательная | $z=\rho e^{i\varphi}$ |

# Задача

Записать КЧ $z = 1 - \sqrt{3}i$ в 3 формах

Реш: 1) $z = (1; -\sqrt{3})$ $\quad x = 1 \quad y = -\sqrt{3}$




Найдём модуль и аргум. КЧ

$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{3}$

Тригонометр. форма

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Показательная форма:

$z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2. Действие с КЧ

а) Сложение:

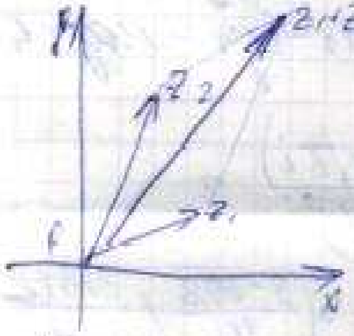
Опр: суммой 2-х КЧ $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ назыв. число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Замечание:

1) Если к мнимой единице относиться как к параметру, то находить сумму КЧ можно складывая соотв. алгебраические выр-я:

$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

2) ~~Это~~ Суммой двух КЧ будет являться радиус-вектор получающийся сложением 2-х векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$



Это следует из сложения векторов в коорд. форме б) Вычитание:

Опр: разностью 2-х КЧ $z_1$ и $z_2$ будем наз-ать КЧ $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Можно сформулировать замечание согл. пред.

$|z_1 - z_2|$ - расстояние между $z_1$ и $z_2$

в) Умножение:

Опр: Произведением $z_1$ и $z_2$ будем называть число

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Замечание:

1) Если мнимое $i$ - это КЧ $i = 0 + 1i$ если это число умножить само на себя по этому правилу то получим

$i^2 = -1 + 0i = -1$

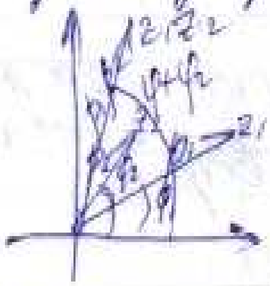
2) если к мнимой ед. относится как к параметру то произведение чисел можно получить

обычным прав. 2-х алгебр. выр-ий:

$$z_1 z_2 = (x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + \underline{x_1 i y_2} + \underline{i y_1 x_2} + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

3) Можно показать, что при умножении 2-х чисел получается число с таким представлением, что его модуль равен произвед. модулей чисел, а аргумент представляет собой сумму аргум. чисел



4) <u>Деление:</u>

Опр: Частным 2-х чисел $z_1$ и $z_2$, $z_2 \neq 0$ наз-ся число $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$, где число $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ - наз-ся сопряженным к числу $z_2 = x_2 - iy_2$

Пример: Найти $\frac{3+2i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(3+2i)(1+\sqrt{3}i)}{\left(\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\right)^2} =$

$$= \frac{3+3\sqrt{3}i+2i-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-2\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}+2)}{4} = \boxed{\frac{3-2\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}+2}{4}i}$$

д) Возведение в степень

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

е) Извлечение корня n-ой степени

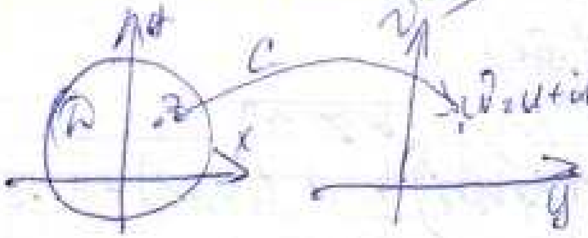
$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right) \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right) \\ \dots \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right) \end{cases}$$

Зам. При извлечении корня n-ой степени из КЧ получаем n-корней

3. Функции к. переменного

Опр: Правило по которому каждому числу $z \in D \in C$ (компл. плоскость)

$\omega = u + iv \in C$




наз-ся функцией к.п. $z$ с обл. опред $D$

Примеры:

1) $\omega = z^2 \quad z = x+iy \quad z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 + 2xiy - y^2)$

$x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow u = x^2 - y^2 = Re\,\omega$

$v = 2xy = Im\,\omega$

Найдем знач функции в т. $z = 1-i$

$u = x^2 - y^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0$

$v = 2xy = 2 \cdot (1 \cdot (-1)) = -2$

$\omega(1-i) = 0 - 2i = -2i$

2) $\omega = e^z \overset{\text{опр}}{=} e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$z = x + iy$

Замечание: Опред. дано таким образом что все свойства обычной показной показат ф-ии сохраняются: например

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Опр: функция $\omega = f(z)$ наз-ся дифф-ой в точке $z$ если существует предел $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

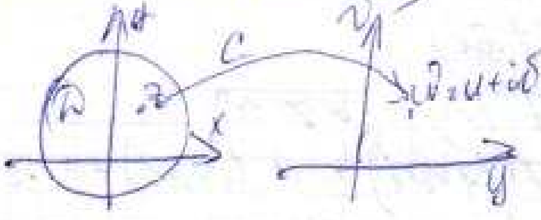
Теорема (необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции), условие Коши-Римана)

Ф-ия $\omega = f(z)$ дифф-ма в т. $z = x + iy$, если вып-ся след. равенства:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$ , причём $f'(z) = u'_x + v'_x i$

3. Функции к-переменного

Опр: Правило по которому каждому числу $z \in D \in C$ (компл. плоскость) $\omega = u + iv \in C$



наз-ся функцией к.п. z с обл. опред D

Примеры:

1) $\omega = z^2 \quad z = x + iy \quad z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 + 2xiy - y^2)$

$x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow u = x^2 - y^2 = Re\,\omega$

$v = 2xy = Im\,\omega$

Найдём знач функции в т. $z = 1 - i$

$u = x^2 - y^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0$

$v = 2xy = 2 \cdot (1 \cdot (-1)) = -2$

$\omega(1 - i) = 0 - 2i = -2i$

2) $\omega = e^z \overset{\text{опр}}{=} e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$z = x + iy$

Замечание: Опред. дано таким образом что все свойства обычной показат. ф-ии сохраняются: например

$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

Опр: функция $\omega = f(z)$ наз-ся диф-ой в точке z если существует предел $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции), условие Коши-Римана)

Ф.к.з $\omega = f(z)$ диф-ма в т. $z = x + iy$, если вып-ся след. равенства:

$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$, причём $f'(z) = u'_x + v'_x i$

Замечание: если $f(z)$ зависит только от $z$, то произв. этих функций ищутся по обычным правилам.

Пример: $f(z) = z^2+2z-1$

Найти $f'(1+2i)$

Решение: $f'(z) = 2z+2$

$f'(1+2i) = 2(1+2i)+2 = 2+4i+2 = \underline{4+4i}$