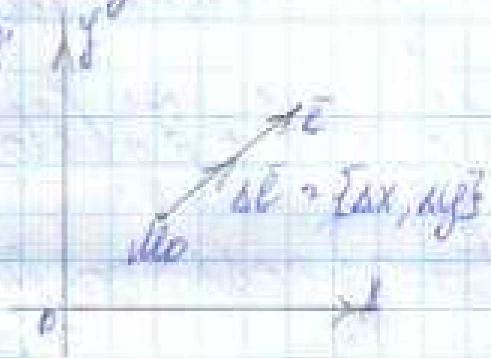
1. Производная по направлению

10.03.13

Частная производная представляет собой произв. по направлению оси Ox и оси Oy

Дано:



Функция $z = z(x;y)$ определена в окр т $M_0(x_0;y_0)$

Опр: $z = z(x;y)$ по направлению вектора $\bar{\ell}$ в т. M_0 наз-ся число

$$z'_{\bar{\ell}}\, M_0 = \lim_{|\Delta \bar{\ell}| \to 0} \frac{z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)}{|\Delta \bar{\ell}|},$$

где $\Delta \bar{\ell} = \{\Delta x; \Delta y\} \parallel \bar{\ell}$

Опр: Вектор (град) $\operatorname{grad} z(M_0) = \{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\}$ вектор-градиентом ф-ии z в т. M_0

Если ф-ия $z = z(x,y)$, то $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0) = z'_x(M_0)\cdot\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$

$\rho \quad M_0\rho$

$$\frac{z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)}{|\Delta \bar{\ell}|} = z'_x(M_0)\cdot\frac{\Delta x}{|\Delta \bar{\ell}|} + z'_y(M_0)\frac{\Delta y}{|\Delta \bar{\ell}|} + o(|\Delta \bar{\ell}|)$$

$\Delta \bar{\ell} = \{\Delta x; \Delta y\}$ $\quad \frac{\Delta \bar{\ell}}{|\Delta \bar{\ell}|} = \left\{\frac{\Delta x}{|\Delta \bar{\ell}|}; \frac{\Delta y}{|\Delta \bar{\ell}|}\right\}$

$\Delta \bar l_0$ - орт вектора $\Delta \bar l$

$\Delta \bar l$

Не зависит от длины вектора приращения

$$\Delta \bar l_0 = \frac{\Delta \bar l}{|\Delta \bar l|}$$

$$z'_{\bar l}(M_0) = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta + 0$$

$$\Delta \bar l_0 = \frac{\Delta \bar l}{|\Delta \bar l|} = \bar l_0 = \frac{\bar l}{|\bar l|} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$$

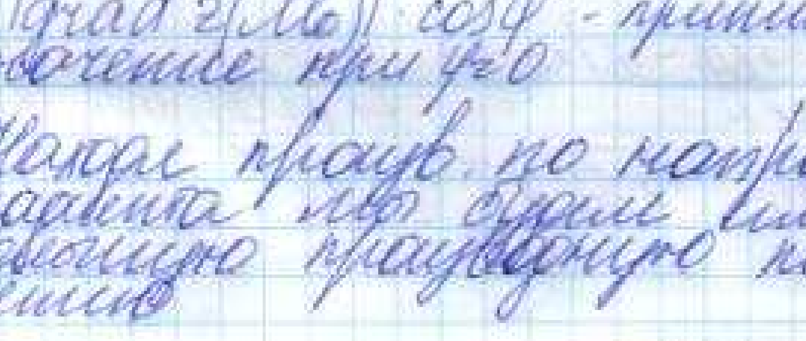
$$z'_{\bar l}(M_0) = z'_x(M_0)\frac{l_x}{|\bar l|} + z'_y(M_0)\frac{l_y}{|\bar l|} =$$

$$= \frac{z'_x(M_0)\bar l_x + z'_y(M_0)\bar l_y}{|\bar l|} = \frac{\operatorname{grad} z(M_0)\cdot \bar l}{|\bar l|}$$

$$z'_{\bar l}(M_0) = \frac{\operatorname{grad} z(M_0)\,\bar l}{|\bar l|}$$

Выводы: 1) Вектор-градиент указывает направление наибольшего роста функции, т.к.

$$z'_{\bar l}(M_0) = \operatorname{grad} z(M_0)\cdot \bar l_0 = |\operatorname{grad} z(M_0)|\,|\bar l_0|\cos\varphi$$



2) $|\operatorname{grad} z(M_0)|\cos\varphi$ - принимает наиб. значение при $\varphi = 0$

Направл. произв. по направлению градиента как функции имеет наибольшую производную по направлению

2) Модуль градиента показывает максимальную скорость роста ф-ии, т. е.

$z'_{grad\, z(M_0)}(M_0) = \frac{grad\, z(M_0) \cdot grad\, z(M_0)}{|grad\, z(M_0)|} =$

$= \frac{|grad\, z(M_0)|^2}{|grad\, z(M_0)|} = |grad\, z(M_0)|$

Задача: Найти скорость изменения функции (производную по направлению) ф-ии $z = x^2y^3 - 3x$ в т. $M_0(-1,2)$ по направлению к т. $M(4,3)$

Решение: $\bar{e} = \overline{M_0M} = \{5;1\}$

$z'_x = (x^2y^3 - 3x)'_x = 2xy^3 - 3$

$z'_y = (x^2y^3 - 3x)'_y = 3y^2x^2 \quad M_0(-1,2)$

$z'_x(M_0) = 2(-1)2^3 - 3 = -19$

$z'_y(M_0) = 3 \cdot 2^2(-1)^2 = 12 \quad grad\, z(M_0) = \{-19; 12\}$

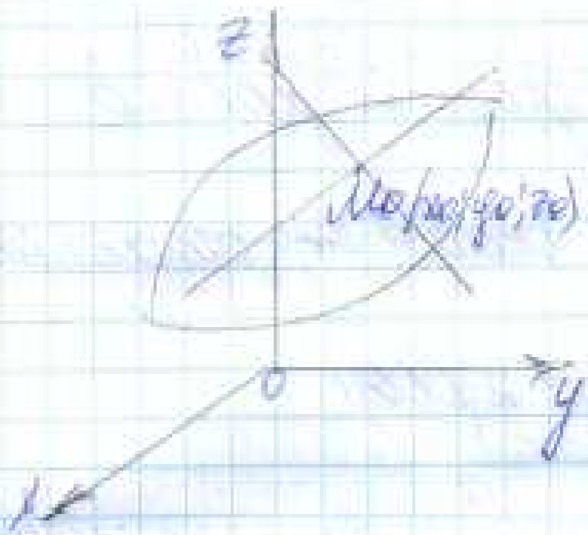
$|\bar{e}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$z'_{\bar{e}}(M_0) = \frac{grad\, z(M_0) \cdot \bar{e}}{|\bar{e}|} = \frac{-19 \cdot 5 + 12 \cdot 1}{\sqrt{26}} = \frac{-95 + 12}{\sqrt{26}} = \frac{-83}{\sqrt{26}}$

Производная по направлению отрицательна ⇒ ф-ия z в точке M_0 по направлению к т. M убывает

2. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Дана поверхность, заданная ф-ей $F(x;y;z) = 0$



В математике доказано, что все касательные для кривых поверхности проходящих через т. M_0 образуют некоторую плоскость, которая наз-ся касательной пл-тью.
Уравнение кас-ой плоскости находится по формуле

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

Опр: Нормалью поверхности в точке M_0 называется прямая $\perp$ая касательной плоскости и проходящей через точку M_0

Выведем уравнение нормали, ур-е касательной плоскости $\Rightarrow$

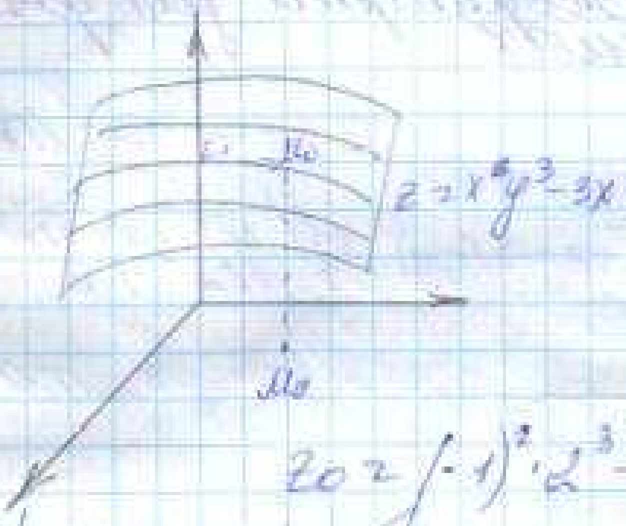
$\bar{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} \perp$ касат-ой пл-ти $\Rightarrow$

$\bar{n}$ - направляющий вектор нормали $\Rightarrow$ канонические ур-е нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

Задача: Найти ур-е касательной пл-ти и нормали к поверхности, заданной графиком ф-ции $z = x^2y^3 - 3x$ в т. $M_0(-1;2)$

Решение:



$$z_0 = (-1)^2 \cdot 2^3 - 3(-1) = 8 + 3 = 11$$

$M_0(-1;2;11)$ - принадлежит гр-ку ф-ции, т.е. поверх-ти

Ур-е поверхности $x^2y^3 - 3x - z = 0 \Rightarrow$

$F(x;y;z) = x^2y^3 - 3x - z$

$F'_x = 2xy^3 - 3$ | $F'_x(M_0) = 2(-1)2^3 - 3 = -19$

$F'_y = 3y^2x^2$ | $F'_y(M_0) = 3 \cdot 2^2(-1)^2 = 12$

$F'_z = -1$ | $F'_z(M_0) = -1$

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

$$-19(x+1) + 12(y-2) - 1(z-11) = 0$$

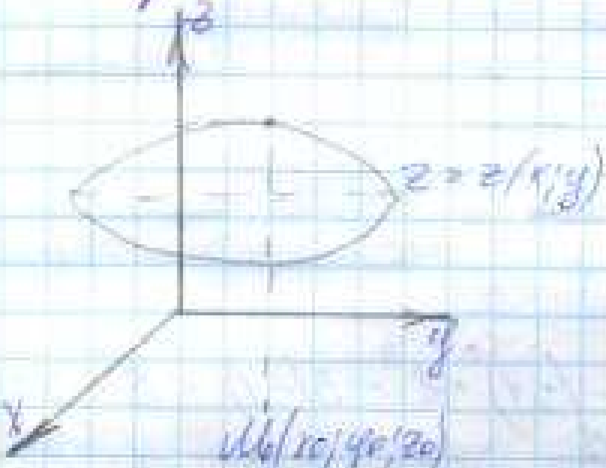
$$-19x - 19 + 12y - 24 - z + 11 = 0$$

$19x - 12y + z + 32 = 0$ - ур-е касательной пл-ти

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

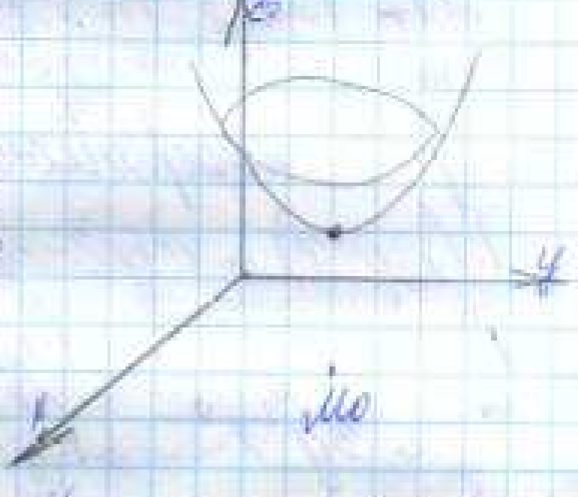
$\frac{x+1}{-19} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-11}{-1}$ – ур-е нормали

3. Понятие экстремума для ф-ии 2-х переменных



$z(M_0) \geq z(M)$, где $M \in$ окрестности т. M_0

M_0 – т. max



$z(M_0) \leq z(M)$, где $M \in$ окр-ти т. M_0

$M_0 \to$ т. min.

Опр: т. M_0 наз-ся критической для $z = z(x,y)$, если или

$\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0 \end{cases}$, или хотя бы одна из частных ~~производных~~ производных не сущ-ет

Теорема (без док-ва) (Необходимое условие т. экстремума)

Если M_0 - т. экстремума, то M_0 - критическая т-ка

Теорема (достаточное условие т. экстремума)

Пусть M_0 - критическая т-ка для дважды дифференцируемой фун-ии $z = z(x,y)$

Пусть $\Delta = z''_{xx}(M_0) \cdot z''_{yy}(M_0) - (z''_{xy}(M_0))^2$

Если $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) > 0$, то M_0 - т. min

Если $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) < 0$, то M_0 - т. max

Если $\Delta < 0$ M_0 не явл-ся т. экстремума

Задача: Исслед. на экстр. $z = 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1$

Решение: 1) Найдём критические т-ки:

$$\begin{cases} z'_x = 4x - 4 = 0, \\ z'_y = 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow M_0(1; -3) \text{ - крит. точка}$$

$z''_{xx} = 4$ | $z''_{xx}(M_0) = 4$ | $\Delta = 4 \cdot 2 - 0^2 = 8 > 0$, $z''_{xx}(M_0) = 4 > 0 \Rightarrow$ M_0 - т. min

$z''_{yy} = 2$ | $z''_{yy}(M_0) = 2$

$z''_{xy} = 0$ | $z''_{xy}(M_0) = 0$ | $z(M_0) = 2 + 9 - 4 - 18 + 1 = -10$

Ответ: $M(1; -3)$ - т. min $z_{min} = -10$