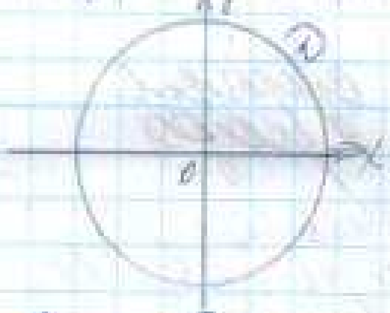
03.04.13

Функции нескольких переменных

1. Понятие функции 2-х переменных

Опр: Правило по которому кажд. паре точки $M(x;y) \in D$

z-наз-ся числовой ф-ей 2ух переменных с областью определения D и аргументом $z = z(x;y)$, $z = f(x;y)$



Способ задания ф-ии:

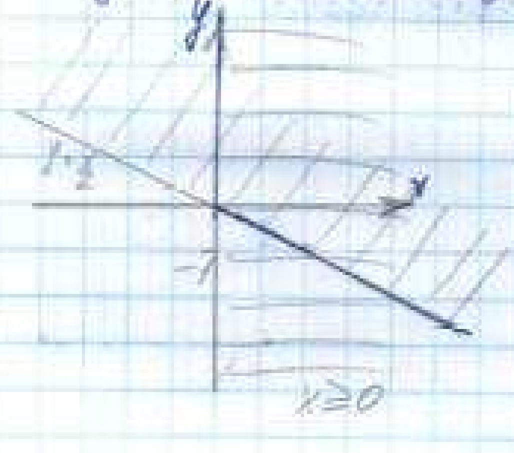
1. Аналитический, т.е. в виде формулы

Пример: $z = \sqrt{x(x+2y)}$. Найти D

$x(x+2y) \geq 0$

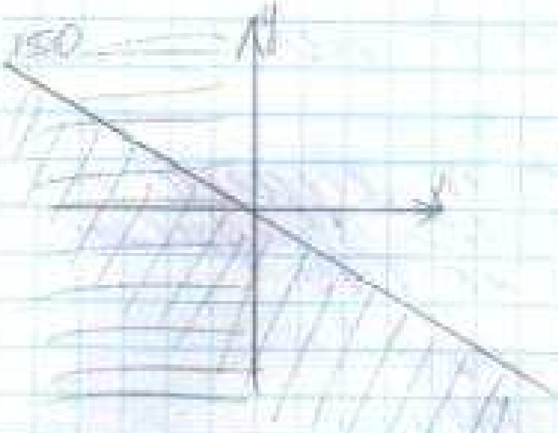
$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \leq 0 \end{cases}$ $\quad 2y \geq -x$, $\quad y \geq -x/2$

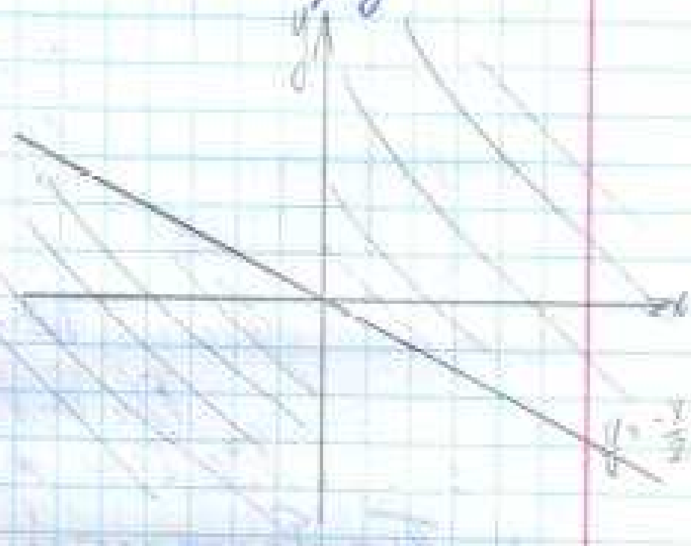
x	0	2
y	0	-1



Запиши 2-ю систему

Область определ. D





2. Графический способ

Граф-ой ф-ей 2-ух переменных $z = z(x, y)$ наз-ся поверхность в пространстве x, y и которой $z - z(x, y) = 0$

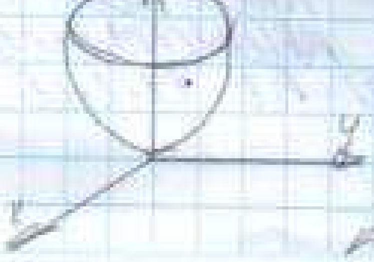
Пример: построить график

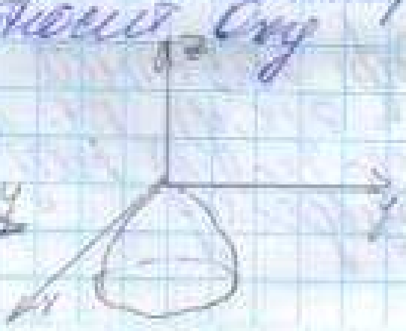
$z = 4 - x^2 - y^2$

Известно что $z = x^2 + y^2$ эллиптический параболоид - поверхность 2-го порядка

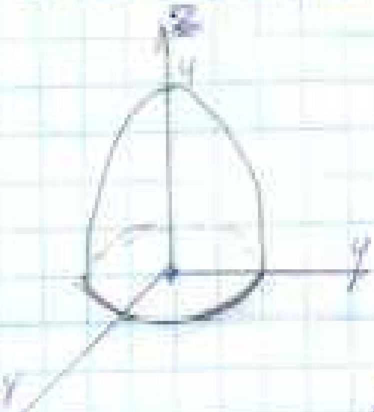
$z - 4 = -x^2 - y^2$ $\quad -z = x^2 + y^2$ - симметричен относ. Oxy

$-(z - 4) = x^2 + y^2$





$-(z-4)=x^2+y^2$ – смещение по оси Oz в положительном напр. на 4 единицы



Найдем линию пересечения графика с пл-ю Oxy

$$\begin{cases} z=4-x^2+y^2 \\ z=0 \ (\text{пл. } Oxy) \end{cases}$$

$0=4-x^2-y^2$ $x^2+y^2=4$ окр. с центром в точке O и $R=2$

3. Табличный способ

$z=z(x,y)$

y\x	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

4. Неявный способ

Ф-ия 2-ух переменных может быть задана в виде уравнения $F(x,y,z)=0$. Для нахождения значения функции необходимо решать это уравнение при заданных x, y

2. Понятие частных производных

Опр: Частная производная ф-ии $z=z(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$ наз-ся число $z_x(M_0)$ равное пределу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0+\Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Замечание: если переменную y „заморозить" (считать const) для ф-ции $z = z(x,y)$, то частная производная по x представл. собой обычную производную ф-ции 1-ой перем. x.

Пример: $z = x^2 y^3$

$y = const$, $z'_x = (x^2 y^3)'_x = y^3 (x^2)'_x = y^3 2x = 2y^3 x$

Частная производная ф-ции $z = z(x,y)$ по переменной y в т. M_0 назыв. число, обозначаемое $z'_y(M_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) =$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x_0, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Замечание: для отыскания частной производной по y необходимо „заморозить" x и найти производную функции 1-ой переменной y.

$z'_y = (x^2 y^3)'_y = x^2 (y^3)'_y = x^2 3y^2 = 3x^2 y^2$

Пример: $z = \frac{2x-y}{x^2+3y^2}$ $y = const$

$$z'_x = \frac{(2x-y)'_x (x^2+3y^2) - (2x-y)(x^2+3y^2)'_x}{(x^2+3y^2)^2} =$$

$(2x-y)'_x = (2x)'_x - (y)'_x = 2 \cdot 1 - 0 = 2$

$(x^2+3y^2)'_x = (x^2)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 0 = 2x$

$$= \frac{2(x^2+3y^2)-2x(2x-y)}{(x^2+3y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{(2x-y)'_y(x^2+3y^2)-(2x-y)(x^2+3y^2)'_y}{(x^2+3y^2)^2} =$$

$(2x-y)'_y = (2x)'_y - (y)'_y = 0-1=-1$

$(x^2+3y^2)'_y = (x^2)'_y + (3y^2)'_y = 0+6y = 6y$

$$= \frac{(-1)(x^2+3y^2) - 6y(2x-y)}{(x^2+3y^2)^2}$$

3. Частные производные высших порядков.

а) Производные 2-ого порядка

Опр: $z''_{xx} = (z'_x)'_x$; $z''_{yy} = (z'_y)'_y$

смешанные производные

$z''_{xy} = (z'_x)'_y$; $z''_{yx} = (z'_y)'_x$

Пример: $3x^3 - y^2 + 2x - 3y + 4$ найти ЧП 2 порядка

$z'_x = (3x^3)'_x + (y^2)'_x + (2x)'_x - (3y)'_x + (4)'_x = 9x^2 - 0 + 2 - 0 + 0 = 9x^2+2$

$z'_y = (3x^3)'_y - (y^2)'_y + (2x)'_y - (3y)'_y + (4)'_y =$
$= 0 - 2y + 0 - 3 = -2y - 3$

$z''_{xx} = (9x^2+2)'_x = 18x$ $\quad z''_{xy} = (9x^2+2)'_y = 0$

$z''_{yy} = (-2y-3)'_y = -2$ $\quad z''_{yx} = (-2y-3)'_x = 0$

Теорема (без док-ва): смешанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования. В частности

$z''_{xy} = z''_{yx}$

Пример: $z = 2x^4\sqrt{y}$

Проверить равенство: $z^{IV}_{xxxy} = z^{IV}_{xyxx}$

Решение: $z'_x = 8x^3\sqrt{y}$ $\quad z''_{xx} = 24x^2\sqrt{y}$

$z'''_{xxx} = 48x\sqrt{y}$ $\quad z^{IV}_{xxxy} = \frac{48x}{2\sqrt{y}}$

$z'_x = 8x^3\sqrt{y}$ $\quad z''_{xy} = 8x^3/2\sqrt{y}$

$z'''_{xyx} = \frac{24x^2}{2\sqrt{y}}$

$z^{IV}_{xyxx} = \frac{48x}{2\sqrt{y}}$

4. Понятие дифференциала функции 2-ух переменных

Опр: Ф-ия 2-ух переменных $z = z(x,y)$ наз-ся дифф-й в т. $M_0(x_0, y_0)$, если полное приращение в т. M_0 имеет следующий вид:

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0) = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y +$$

$+ \rho\,\alpha(\rho)$, где ρ — длина вектора приращения

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ $\quad \alpha(\rho)$ — б.м.ф. $(\rho \to 0)$

Опр: Величина $dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y$ — называется дифференциалом функции в т. M_0 $z = z(x,y)$

Опр: Величина $\Delta z = z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0;y_0)$ наз-ся полным приращением ф-ции в т. M_0

Если функция $z = z(x,y)$ - дифференцируема в т. $M_0(x_0;y_0)$, то $\Delta z \approx dz$ $\rho \to 0$

Пример: (использ. диф-ла в приближ. вычислении)

Вычислить приближенно $(0{,}98)^{4{,}04}$

Решение: 1) $z = x^y$ $x = 0{,}98$ $y = 4{,}04$

2) $x_0 = 1$ $y_0 = 4$ $z(x_0;y_0) = 1^4 = 1$

3) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}$ $z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x$

4) $z'_x(x_0;y_0) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4$

5) $z'_y(x_0;y_0) = 1^4 \ln 1 = 0$

6) $z(x;y) \approx z(x_0;y_0) + z'_x(x_0;y_0) \cdot (x-x_0) + z'_y(x_0;y_0) \cdot (y-y_0)$

$0{,}98^{4{,}04} \approx 1 + 4(0{,}98-1) + 0(4{,}04-4) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$