Ответ: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{27}x$

Теорема 2 Пусть $f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}$

Тогда $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\,e^{\alpha x}$ где r - кол-во корней хар ур-ний, равных α; n - степени многочлена из правой части $f(x)$. $\tilde{P}_n(x)$ - многочлен n-ой степени общего с неопределенным коэффициентом

Задача Найти $y_{о.н}$: $y'' + y' = 3e^{-x}$, $n=0, \alpha = -1$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$

а) $y'' + y' = 0$ $\quad \lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -1$

$y_{о.о} = C_1 + C_2 e^{-x}$

б) $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\,e^{\alpha x}$

$r = 1$ - кол-во корней хар. ур-ний, равных $\alpha = -1$, $n = 0 \Rightarrow \tilde{P}_n(x) = A$

$y_{ч.н} = Ax e^{-x}$

$y'_{ч.н} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x}(1-x)$

$y''_{ч.н} = -Ae^{-x}(1-x) + Ae^{-x}(-1) = -Ae^{-x}(1-x+1) =$

$= -Ae^{-x}(2-x)$

Подставляем в исходное ДУ

$-Ae^{-x}(2-x) + Ae^{-x}(1-x) = 3e^{-x}$

$-2A + Ax + A - Ax = 3$

$-A = 3$
$A = -3$

$y_{ч.н} = -3xe^{-x}$

Ответ: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^{-x} - 3xe^{-x}$

Теорема 3 Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$

Тогда $y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_e(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_e(x)\sin\beta x)$,

где r - кол-во корней хар. ур-ния, равных $\alpha + \beta i$

Задача: Найти $y_{о.н}$: $y'' + 9y = 4\cos 2x$
$\alpha = 0,\ \beta = 2;\ n = 0;\ m = 0$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$

а) $y'' + 9y = 0$
$\lambda^2 + 9 = 0$
$\lambda^2 = -9$
$\lambda_{1,2} = \pm 3i$

$y_{о.о} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

б) $y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_e\cos\beta x + \tilde{Q}_e\sin\beta x)$, $r = 0$, т.к корней хар. ур-ния, равных $\alpha + \beta i = 2i$, нет

$e^{\alpha x} = e^{0x} = 1$

$e = \max(n, m) = 0 \Rightarrow \tilde{P}_0 = A,\ \tilde{Q}_0 = B$

$y_{ч.н} = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y'_{ч.н} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y''_{ч.н} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Подставляем в исходное ДУ

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\cos 2x$

$$\begin{array}{l|lll} \cos 2x & -4A + 9A = 4 & 5A = 4 & A = \frac{4}{5} \\ \sin 2x & -4B + 9B = 0 & 5B = 0 & B = 0 \end{array}$$

Ответ: $y_{он} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{4}{5}\cos 2x$

Лекция 12

Линейные неоднородные ДУ 2го порядка с постоянными коэффициентами с произвольной правой частью

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $a_1, a_2 \in R$

$f(x)$ - произвольная ф-ция

Используем метод вариации произвольных постоянных:

Схема метода

1) Найдем 2 линейно независимых реш.

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - линейно незав. реш.

$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 - незав. произв. постоянные

2) Будем искать $y_{он}$ в виде

$y_{он} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ Будем искат

$C_1(x)$ и $C_2(x)$

$y'_{oн} = \underline{c_1' y_1} + c_1 y_1' + \underline{c_2' y_2} + c_2 y_2'$

Пусть $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ $(*)$

тогда $y'_{oн} = c_1 y_1' + c_2 y_2'$

$y''_{oн} = \underline{c_1' y_1'} + c_1 y_1'' + \underline{c_2' y_2'} + c_2 y_2''$

Пусть $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$ $(**)$ тогда

$y''_{oн} = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + f(x)$

При ограничениях $(*)$ и $(**)$

$y_{oн} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ - явл. реш. ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

Дей-но,

$\underline{c_1 y_1'' + c_2 y_2''} + f(x) + a_1(\underline{c_1 y_1' + c_2 y_2'}) + a_2(\underline{c_1 y_1 + c_2 y_2}) \overset{?}{=} f(x)$

$c_1(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0}) + c_2(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0}) + f(x) \overset{?}{=} f(x)$

$f(x) = f(x)$

А сущ. ли ф-ции c_1 и c_2 для которой выполняется ограничения $(*)$ и $(**)$?

$$\begin{cases} y_1 c_1' + y_2 c_2' = 0 \\ y_1' c_1' + y_2' c_2' = f(x) \end{cases}$$

$c_1'(x)$ и $c_2'(x)$ - неизвестные в этой системе

Определителем этой системы явл определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для всех } x$$

Поэтому данная система имеет ед.

реш которая может быть получена, например, по правилу Крамера.

Пусть $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - ед. реш. этой системы

3) Откуда $C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \int^x C_1'(x)dx + \tilde{C}_1$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx = \int^x C_2'(x)dx + \tilde{C}_2$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ - настоящие постоянные интегралов

4) $y_{он} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

Полезная ф-ла:

$$\boxed{y_{он}' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)}$$

Док-во:

$y_{он}' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$

Задача:
$$\begin{cases} y'' + 3y' = \dfrac{9}{\sin 3x} \\ y(0) = \ln 4 \\ y'(0) = 3(1-\ln 2) \end{cases}$$

Линейное неоднородное... (назв. параграфа)

① Найдем y_1, y_2:

$y'' + 3y' = 0$

Хар-ое ур-ние: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ $\quad \lambda(\lambda+3)=0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3$

$\Rightarrow y_1 = e^{0x}, \quad y_2 = e^{-3x}$

$y_1 = 1$

② Ищем реш $y_{о.н}$ в виде:

$$y_{о.н} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + e^{-3x} C_2' = 0 & (1) \\ 0 + (-3e^{-3x}) C_2' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} & (2) \end{cases}$$

$$2) \Rightarrow C_2' = \frac{-3e^{3x} e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$1) \Rightarrow C_1' = -e^{-3x} C_2' = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

③ $$C_1 = \int C_1' dx = \int \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} dx = \int \frac{d(e^{3x}+1)}{1+e^{3x}} =$$

$$= \ln(1+e^{3x}) + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int \frac{-3e^{3x} e^{3x}}{1+e^{3x}} dx = -\int \frac{e^{3x} d(e^{3x})}{1+e^{3x}} =$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{t+1} = -\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = -\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \int \frac{1}{t+1} d(t+1) - \int dt = \ln|t+1| - t + \tilde{C}_2 =$$

$$= \ln(e^{3x}+1) - e^{3x} + \tilde{C}_2$$

④ $$y_{о.н} = (\ln(1+e^{3x}) + \tilde{C}_1)1 + (\ln(e^{3x}+1) - e^{3x} + \tilde{C}_2)e^{-3x}$$

⑤ $$y(0) = \ln 4$$

$$\ln 4 = \ln 2 + \tilde{C}_1 + \ln 2 - 1 + \tilde{C}_2$$

$\ln 4 = \ln 4 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - 1$

$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 1$

$y'(0) = 3(1 - \ln 2)$

$\boxed{y'_{он} = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_2'(x)}$

$y'_{он} = 0 + (\ln(e^{3x}+1)e^{-3x} + \tilde{C}_2)(-3e^{-3x})$

$3(1 - \ln 2) = -3(\ln 2 - 1 + \tilde{C}_2)$

$3 - 3\ln 2 = -3\ln 2 + 3 - 3\tilde{C}_2$

$\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = 1$

$y = (\ln(1+e^{3x}) + 1 + (\ln(1+e^{3x}) - e^{3x})e^{-3x}$

$y = \ln(1+e^{3x}) + 1 + e^{-3x}\ln(1+e^{3x}) - 1$

Ответ: $y = \ln(1+e^{3x})(1+e^{-3x})$