

$$y_{2,m-1} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \cos \frac{\sqrt{q}}{2}x$$

$$y_{2,m} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \sin \frac{\sqrt{q}}{2}x$$

Лекция 11

Лекция 11

Классификация:

Линейные ДУ 2-го порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

Если $f(x) = 0$, то ДУ ~~однородные~~ однородные
 Если $f(x) \neq 0$, то ДУ неоднородные
 $a_1(x), a_2(x), f(x) \in C$ или C^1 или C^2 или C^3 или C^4 или C^5 или C^6 или C^7 или C^8 или C^9 или C^{10} или C^{11} или C^{12} или C^{13} или C^{14} или C^{15} или C^{16} или C^{17} или C^{18} или C^{19} или C^{20} или C^{21} или C^{22} или C^{23} или C^{24} или C^{25} или C^{26} или C^{27} или C^{28} или C^{29} или C^{30} или C^{31} или C^{32} или C^{33} или C^{34} или C^{35} или C^{36} или C^{37} или C^{38} или C^{39} или C^{40} или C^{41} или C^{42} или C^{43} или C^{44} или C^{45} или C^{46} или C^{47} или C^{48} или C^{49} или C^{50} или C^{51} или C^{52} или C^{53} или C^{54} или C^{55} или C^{56} или C^{57} или C^{58} или C^{59} или C^{60} или C^{61} или C^{62} или C^{63} или C^{64} или C^{65} или C^{66} или C^{67} или C^{68} или C^{69} или C^{70} или C^{71} или C^{72} или C^{73} или C^{74} или C^{75} или C^{76} или C^{77} или C^{78} или C^{79} или C^{80} или C^{81} или C^{82} или C^{83} или C^{84} или C^{85} или C^{86} или C^{87} или C^{88} или C^{89} или C^{90} или C^{91} или C^{92} или C^{93} или C^{94} или C^{95} или C^{96} или C^{97} или C^{98} или C^{99} или C^{100}

Линейные ДУ 2-го порядка с постоянными коэфф.
 $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$
 $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

1. Линейные неоднородные ДУ высшего порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad f(x) \neq 0(x)$$

Теорема: общее решение неоднородного ДУ (*) имеет вид $y_{obn} = y_{obn} + y_{part}$,
 где y_{obn} - общее решение однородного уравнения, y_{part} - общее решение неоднородного уравнения $(f(x) \neq 0)$,
 y_{part} - частное решение неоднородного уравнения.

Прим. (следствие) $n=2$ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

1) Покажем, что y_{obn} - реш. (*)

$$\underbrace{y_{obn}''}_{y_{obn}''} + \underbrace{y_{obn}'}_{y_{obn}'} + a_1(x)(y_{obn}'' + y_{obn}') + a_2(x)(y_{obn}'' + y_{obn}') = f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} y''_{00} + a_1(x)y'_{00} + a_2(x)y_{00} &= 0 \\ y'_{\varepsilon n} + a_1(x)y'_{\varepsilon n} + a_2(x)y_{\varepsilon n} &= f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{верное} \\ \text{равенство}$$

2) Показано, что любое решение \tilde{y} для $Dy(x)$ имеет вид:

$$\tilde{y} = y_{00} + y_{\varepsilon n}, \quad \forall x$$

$$\tilde{y} = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2 + y_{\varepsilon n}, \quad \text{где}$$

y_1, y_2 - линейно независимые реш. (x) ($f(x) = 0$)

3) Пусть $\tilde{y}(x_0) = y_0, \quad \tilde{y}'(x_0) = y_1 \Leftrightarrow \tilde{y}$ - решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (x, x)$$

4) Условия решения системы:

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 y_1(x_0) + \tilde{c}_2 y_2(x_0) + y_{\varepsilon n}(x_0) = y_0 \\ \tilde{c}_1 y_1'(x_0) + \tilde{c}_2 y_2'(x_0) + y'_{\varepsilon n}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Эта система имеет ед. реш., т.к. определитель системы есть определитель $W(x_0) \neq 0$

Поэтому ф-ция $y = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2 + y_{\varepsilon n}$ явл. решением задачи Коши (x, x)

5) $\tilde{y} = y$ явл. реш. любой задачи Коши (x, x) по теореме Коши $\tilde{y} = y + \tilde{y}$

2. Линейное неоднородное ДУ
 высшего порядка с постоянными
 коэффициентами со спец. правой
 частью (xxx) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$,
 $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$

Таблица типов спец. частей
 частей $f(x)$

N	Правая часть $f(x)$	Пример																								
I	$f(x) = P_n(x)$ - многочлен степени n	$P_0(x) = 100$, $P_0'(x) = -5$ $P_1(x) = 2x - 1$, $P_1''(x) = 6$ $P_2(x) = 2x^2$, $P_2(x)'' = x^2 - 1$																								
II	$f(x) = P_n(x) e^{\lambda x}$	$f(x) = x e^{-x}$, $n=1$, $\lambda = -1$ $f(x) = 3 e^{2x}$, $n=0$, $\lambda = 2$																								
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>N</th> <th>$f(x)$</th> <th>λ</th> <th>p</th> <th>n</th> <th>m</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$e^{-x}(\cos 2x - 3 \sin x)$</td> <td>-1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$\cos x$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$e^{2x} \sin 5$</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	N	$f(x)$	λ	p	n	m	1	$e^{-x}(\cos 2x - 3 \sin x)$	-1	2	1	0	2	$\cos x$	0	1	0	0	3	$e^{2x} \sin 5$	2	0	1	0
N	$f(x)$	λ	p	n	m																					
1	$e^{-x}(\cos 2x - 3 \sin x)$	-1	2	1	0																					
2	$\cos x$	0	1	0	0																					
3	$e^{2x} \sin 5$	2	0	1	0																					

Теорема 3 (оц) Дале-ва). Пусть $f(x) = P_n(x)$

Тогда $y_{\text{part}} = x^s \tilde{P}_n(x)$, где s - кол-во корней
 хар. ур-ния равных 0

$\tilde{P}_n(x)$ - многочлен ст. n общего вида

n - степень многочлена
 из правой части ДУ

Таблица $\tilde{P}_n(x)$:

n	$P_n(x)$
0	A
1	$A_1x + B$
2	$A_2x^2 + B_1x + C$
3	$A_3x^3 + B_2x^2 + C_1x + D$

A, B, C, D - произвольные коэффициенты

Задача Найти y_{inh} $y'' - 3y' = 1 - x^2$

Ищем частное решение Dy 2-м способом с постоянными коэффициентами со степ. правой частью $f(x) = 1 - x^2$ ($n=2$)

$$y_{inh} = y_{inh} + y_{inh}$$

$$\begin{aligned} 0) \quad y'' - 3y' &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad y_{inh} &= x^2 \cdot \tilde{P}_n(x) \\ &= x^2 \cdot \text{какая-то часть} \\ \text{ур. имеет вид } 0 \\ n=2 \Rightarrow \tilde{P}_n(x) &= Ax^2 + Bx + C \end{aligned}$$

$$y_{inh} = C_1 + C_2 e^{3x}$$

$$\begin{aligned} y_{inh} &= x(A_2x^2 + B_1x + C) \\ y'_{inh} &= Ax^2 + B_1x + C \\ y''_{inh} &= 2Ax + B_1 \\ y'''_{inh} &= 2A \end{aligned}$$

Подставляем в исходное Dy

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2B_1x + C) = 1 - x^2$$

$$-9Ax^2 - (6A - 6B_1)x + 2B - 3C = 1 - x^2$$

$$x^2 \quad | \quad -9A = -1 \quad A = \frac{1}{9}$$

$$x \quad | \quad 6A - 6B_1 = 0 \quad B_1 = A = \frac{1}{9}$$

$$x^0 \quad | \quad 2B - 3C = 1 \Rightarrow \frac{2}{9} - 3C = 1 \quad C = -\frac{7}{27}$$

$$y_{inh} = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{27}x$$

Ответ: $y_{общ} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$

Теорема 2 Пусть $f(x) = P_n(x) e^{\lambda x}$

Тогда $y_{общ} = x^s \tilde{P}_n(x) e^{\lambda x}$, где s - кол-во корней λ кор. ур-ний, равных λ ; n - степень многочлена из правой части $f(x)$.
 $\tilde{P}_n(x)$ - многочлен n -ой степени общо с непрерывными коэффициентами.

Задача Найти $y_{общ}$: $y'' + y' = 3e^x$, $n=0, \lambda=1$

$$y_{общ} = y_{од} + y_{с.н}$$

$$\text{а) } y'' + y' = 0 \quad \lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

$$y_{од} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

$$\text{б) } y_{с.н} = x^s \tilde{P}_n(x) e^{\lambda x}$$

$\lambda = 1$ - кол-во корней λ кор. ур-ний, равных $\lambda = -1$, $n=0 \rightarrow P_n(x) = A$

$$y_{с.н} = A x e^x$$

$$y'_{с.н} = A e^x - A x e^x = A e^x (1 - x)$$

$$y''_{с.н} = -A e^x (1 - x) + A e^x (-1) = -A e^x (1 - x + 1) = -A e^x (2 - x)$$

Подставим в исходное ДУ

$$-A e^x (2 - x) + A e^x (1 - x) = 3 e^x$$

$$-2A + A x + A - A x = 3$$