$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$y_{2m} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

Лекция 11

Лекция 11

Напоминание:

Линейные ДУ 2-го порядка:

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

Если $f(x) = 0$, то ДУ однородные

Если $f(x) \neq 0$, то ДУ неоднородные

$a_1(x), a_2(x), f(x)$ - ф-ции от x

Линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэфф. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

$a_1, a_2 = const$

1. Линейное неоднородное ДУ высших порядков

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \ f(x) \neq 0 \ (*)$

Теорема: общее решение неоднородного ДУ (*) имеет вид $y_{o.н} = y_{o.о} + y_{ч.н}$, где $y_{o.н}$ - общее решение неоднородного ур-ния, $y_{o.о}$ - общее реш. однородного ур-ния ($f(x)=0$), $y_{ч.н}$ - частное реш. неоднородного ур-ния

Док-во (схема) $n = 2$ $\quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

1) Покажем, что $y_{o.н}$ - реш. (*)

$\underline{y''_{o.о}} + y''_{ч.н} + a_1(x)(\underline{y'_{o.о}} + y'_{ч.н}) + a_2(x)(y_{o.о} + y_{ч.н}) = f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} y''_{oo} + a_1(x)\, y'_{oo} + a_2(x)\, y_{oo} = 0 \\ y''_{ч.н} + a_1(x)\, y'_{ч.н} + a_2(x)\, y_{ч.н} = f(x) \end{array}\right\| \Rightarrow \text{верное равенство}$$

г) Покажем, что любое решение $\tilde{y}$ для ДУ (*) имеет вид:

$$\tilde{y} = y_{oo} + y_{ч.н}, \text{ т.е.}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + y_{ч.н}, \text{ где}$$

y_1, y_2 - линейно независимые реш. (*) $(f(x)=0)$

а) Пусть $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}'(x_0) = y_1$, $\Rightarrow \tilde{y}$ - решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x) \\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (**)$$

б) Найдем решение системы:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 y_1(x_0) + \tilde{C}_2 y_2(x_0) + y_{ч.н}(x_0) = y_0 \\ \tilde{C}_1 y_1'(x_0) + \tilde{C}_2 y_2'(x_0) + y'_{ч.н}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Эта система имеет ед. реш., т.к. определитель системы есть определитель $W(x_0) \neq 0$

Поэтому ф-ция $y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + y_{ч.н}$ явл. решением задачи Коши (**)

в) $\tilde{y}$ и y явл. реш. одной задачи Коши (**) по теореме Коши $\tilde{y} = y$ ч.т.д.

2. Линейное неоднородное ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами со спец. правой частью (***) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, $a_1, a_2, \dots \in R$

Таблица типов спец. правых частей $f(x)$

N	Правая часть $f(x)$	Пример
I	$f(x) = P_n(x)$ - многочлен степени n	$\overset{n=0}{P_0(x) = 100}$, $\overset{n=0}{P_0(x) = -5}$ $\overset{n=1}{P_1(x) = 2x - 1}$, $\overset{n=1}{P_1(x) = 6x}$ $\overset{n=2}{P_2(x) = 2x^2}$, $\overset{n=2}{P_2(x) = x^2 - 1}$
II	$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$	$f(x) = xe^{-x}$, $n = 1$, $\alpha = -1$ $f(x) = 3e^{3x}$, $n = 0$, $\alpha = 3$
		(see table below)

N	$f(x)$	α	β	n	m
1	$e^{-x}(x\cos 2x - 3\sin x)$	-1	2	1	0
2	$\cos x$	0	1	0	0
3	$e^{3x} \sin 5$	3	5	0	0

Теорема 1 (без док-ва). Пусть $f(x) = P_n(x)$

Тогда $y_{ч.н.} = x^r \tilde{P}_n(x)$, где r - кол-во корней хар. ур-ния равных 0

$\tilde{P}_n(x)$ - многочлен ст. n общего вида

$\boxed{n \text{ - степень многочлена из правой части ДУ}}$

Таблица $\tilde{P}_n(x)$:

n	$P_n(x)$
0	A
1	$Ax+B$
2	Ax^2+Bx+C
3	Ax^3+Bx^2+Cx+D

A, B, C, D – неопределённый коэффициент

Задача. Найти $y_{о.н}$ $\quad y''-3y'=1-x^2$

Линейное неоднород. ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со спец. правой частью $f(x)=1-x^2$ $(n=2)$

$y_{он}=y_{о.о}+y_{ч.н}$

а) $y''-3y'=0$

$\lambda^2-3\lambda=0$

$\lambda(\lambda-3)=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=3$

$y_{о.о}=C_1+C_2e^{3x}$

б) $y_{ч.н}=x^r\cdot\tilde{P}_n(x)$

$r=1$ – кол-во корней хар. ур-ний равных 0

$n=2 \Rightarrow P_n(x)=Ax^2+Bx+C$

$y_{ч.н}=x(Ax^2+Bx+C)$

$y_{ч.н}=Ax^3+Bx^2+Cx$

$y'_{ч.н}=3Ax^2+2Bx+C$

$y''_{ч.н}=6Ax+2B$

Подставляем в исходное ДУ

$6Ax+2B-3(3Ax^2+2Bx+C)=1-x^2$

$-9Ax^2+(6A-6B)x+2B-3C=1-x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & -9A=-1 \qquad A=\frac{1}{9} \\
x & 6A-6B=0 \qquad B=A=\frac{1}{9} \\
x^0 & 2B-3C=1 \Rightarrow \frac{2}{9}-3C=1 \qquad C=-\frac{7}{27}
\end{array}
$$

$y_{чн}=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{9}x^2-\frac{7}{27}x$

Ответ: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{27}x$

Теорема 2 Пусть $f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}$

Тогда $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\,e^{\alpha x}$ где r - кол-во корней хар ур-ний, равных α; n- степени многочлена из правой части $f(x)$. $\tilde{P}_n(x)$ - многочлен n-ой степени общего с неопределенными коэффициентом

Задача Найти $y_{о.н}$: $y'' + y' = 3e^{-x}$, $n=0, \alpha=-1$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$

а) $y'' + y' = 0$ $\qquad \lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0;\quad \lambda_2 = -1$

$y_{о.о} = C_1 + C_2 e^{-x}$

б) $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\,e^{\alpha x}$

$r = 1$ - кол-во корней хар. ур-ний, равных $\alpha = -1$, $n = 0 \Rightarrow P_n(x) = A$

$y_{ч.н} = Ax e^{-x}$

$y'_{ч.н} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x}(1-x)$

$y''_{ч.н} = -Ae^{-x}(1-x) + Ae^{-x}(-1) = -Ae^{-x}(1-x+1) =$

$= -Ae^{-x}(2-x)$

Подставляем в исходное ДУ

$-Ae^{-x}(2-x) + Ae^{-x}(1-x) = 3e^{-x}$

$-2A + Ax + A - Ax = 3$