Св-во 1: Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно зависимы, то $W(x)=0$

Док-во: $y_1(x) = Cy_2(x) \Rightarrow y_1'(x) = Cy_2'(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = Cy_2 \cdot y_2' - Cy_2' \cdot y_2 = 0$$

Пример $W(x)$

$y_1 = x$, $y_2 = x^2 \Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$

Лекция 10

Линейные однородные ДУ 2-го порядка

(*) $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

$a_1(x)$, $a_2(x)$ – непрерывные ф-ции

1) Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Свойство 1

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно зависимые, то $W(x) \equiv 0$

Свойство 2

Если $y_1(x), y_2(x)$ – решения $(*)$, то

$$W' = -a_1 W$$

Док-во:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \quad \Big| \cdot y_2 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \quad \Big| \cdot y_1 \end{aligned}$$

$$\underbrace{y_2 y_1'' - y_2'' y_1}_{-W'} + a_1 \underbrace{(y_1' y_2 - y_2' y_1)}_{W'} = 0$$

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2') = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$-W' - a_1 W = 0$$

$$W' = -a_1 W$$

Следствие 1: $W = c e^{-\int a_1 dx}$

Док-во: $\dfrac{dW}{dx} = -a_1 W$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int a_1 dx + c$$

$$\ln|W| = -\int a_1 dx + c$$

$$W = \pm e^{-\int a_1 dx + c}$$

$$W = c e^{\int a_1 dx}$$

Следствие 2: $W(x) \equiv 0$ либо $W(x) \neq 0$ для всех x

Док-во: если $c = 0 \Rightarrow W(x) \equiv 0$
если $c \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0$ для всех x

Следствие 3: Если $y_1(x), y_2(x)$ - линейно независимое реш. ДУ (*), то $W(x) \neq 0$ для всех x.

Док-во: метод от противного

Пусть $W(x_0) = 0 \xRightarrow{\text{по следствию}} W(x) \equiv 0$

$y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0$

Т.к. y_1 и y_2 - линейно независимое, то $y_1 \neq 0$

$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv 0$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$

$\frac{y_2}{y_1} = c \Rightarrow y_2 = c y_1 \Rightarrow$

y_1, y_2 - линейно зав. $\Rightarrow$ противоречие

Следствие 4. Пусть y_1 и y_2 - реш. ДУ (*)

y_1, y_2 - линейно незав. $\Leftrightarrow$ когда $W(x) \neq 0$ для всех x.

Док-во: $\Rightarrow$ (см. следствие 3)
$\Leftarrow$ от противного: пусть y_1, y_2 - линейно зависимое (см. начало лекции)

$\Rightarrow W(x) = 0$, противоречие

Теорема (об общем решении ДУ (*))

Если y_1 и y_2 - линейно незав. решения ДУ (*), то общее решение однородного ур-ния.

$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где

C_1, C_2 — независимые произвольные постоянные

1 Покажем, что $y_{o.o}$ — реш. (*)

$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) \overset{?}{=} 0$

$C_1(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0}) \overset{?}{=} 0$

$0 = 0$

2 Покажем, что любое решение $\tilde{y}$ ДУ (*), может быть представлено в виде

$\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$

Пусть $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}'(x_0) = y_1$

Найдем $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$: $\tilde{C}_1 y_1(x_0) + \tilde{C}_2 y_2(x_0) = y_0$

$\tilde{C}_1 y_1'(x_0) + \tilde{C}_2 y_2'(x_0) = y_1$

○ — число

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — неизвестные

$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$ (см следствие 4)

$\Rightarrow$ сущ. ед. решение (см правило Крамера)

$\tilde{y}$ — реш. $\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}_1'(x_0) = y_1 \end{cases}$

$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$ — реш. этой задачи Коши

По теореме Коши $\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

(**) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Замечание: хар. ур-ние получ. из ДУ заменой $y^{(n)} \to \lambda^n$

Теорема (об общем реш. ДУ (**))

Опред: Характеристическим ур-нием для ДУ (**) наз. ур-ние: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

$y'' \to \lambda^2$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$

1) Если λ_1, λ_2 - два различных корня хар. ур-ния, то $y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) Если λ_1 - ед. корень (λ_1 - корень кратности 2) хар. ур-ния, то
$$y_{о.о.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3) Если $D < 0$, то $y_{о.о} = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2}x + C_2 e^{-\frac{a_1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2}x$

Замечание (способ запоминания ф-лы 3))

$$D<0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(-1)(-D)}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-D}\sqrt{-1}}{2} =$$

$\boxed{D = a_1^2 - 4a_2}$

$$= \frac{-a_1 \pm \sqrt{-D}\, i}{2} = \text{мнимая ед.}$$

$$= -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{-D}}{2} i$$

веществ. часть — мнимая часть

Пример:

1) $y'' + 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

$y_{о.о} = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$D = 16 - 16 = 0$

$\lambda = -\frac{4}{2} = -2$

$y_{о.о} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Док-во: 1): Докажем, что $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ — линейно незав. решения ДУ (**)

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ — реш. (**), т.к.

$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_1 x} \stackrel{?}{=} 0$

$\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2 = 0$, т.к. λ_1 — корень

y_1, y_2 — линейно независимые, т.к.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} =$$

$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$, т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Линейные однородные ДУ n-го порядка $n \geq 2$ с постоянными коэффициентами

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$ (***)

$a_1, a_2, \dots, a_n \in R \qquad n \geq 2$

Опред.: Ур-ние вида $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ назыв. хар. ур-нием для ДУ (***)

Утверждение: Любой многочлен n-ой степени раскладывается в произв. 2х типов

Тип I $\quad (x-a)^m$

Тип II $\quad (x^2+px+q)^m$, где x^2+px+q — неразложимый ($D<0$) квадратный трехчлен

Правило 1. $y_{o.o} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$,

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — независ. произв. постоянные

Замечание: Число слагаемых в сумме совпадает с порядком ДУ (***)

Правило 2. Если в разложении многочлена есть $(x-a)^m$, то в $y_{o.o}$ ему соотв. $\underline{m}$ ф-ций:

$y_1 = e^{ax}, \; y_2 = xe^{ax}, \; y_3 = x^2e^{ax}, \dots \; y_m = x^{m-1}e^{ax}$

Замечание: $m=1: \; (x-a) \to y_1 = e^{ax}$

$m=2: \; (x-a) \to y_1 = e^{ax}, \; y_2 = xe^{ax}$

Правило 3. Если в разлож. многочлена есть множитель II типа $(x^2+px+q)^m$, то в $y_{o.o}$ ему соотв. $\underline{m}$ пар ф-ций.

$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x \qquad y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$y_3 = xe^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x \qquad y_4 = xe^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$y_{2m} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

Лекция 11

Лекция 11

Напоминание:

Линейные ДУ 2-го порядка:

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

Если $f(x) = 0$, то ДУ однородные

Если $f(x) \neq 0$, то ДУ неоднородные

$a_1(x), a_2(x), f(x)$ - ф-ции от x

Линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэфф. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

$a_1, a_2 = const$

1. Линейное неоднородное ДУ высших порядков

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \; f(x) \neq 0 \; (*)$

Теорема: общее решение неоднородного ДУ (*) имеет вид $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$, где $y_{о.н}$ - общее решение неоднородного ур-ния, $y_{о.о}$ - общее реш. однородного ур-ния ($f(x) = 0$), $y_{ч.н}$ - частное реш. неоднородного ур-ния

Док-во (схема) $n = 2$ $\quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

1) Покажем, что $y_{о.н}$ - реш. (*)

$y''_{о.о} + y''_{ч.н} + a_1(x)(y'_{о.о} + y'_{ч.н}) + a_2(x)(y_{о.о} + y_{ч.н}) = f(x)$