В силу монотонности ф-ции $y = \ln(x)$, в силу произвольной постоянной $c>0$ =>

$$z + \sqrt{z^2+1} = cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx$$ - общий интеграл

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2 \qquad x>0$$

При $x<0$ $\quad y - \sqrt{x^2-y^2} = c$

Лекция 9

1. Прием реш. ДУ путем изменения «научав.» зависимост

лекция

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$ (см. зад. о форме зеркала)

Если решать обычным способом - однородное ур-ние

$y = zx$

$$z'_x + z = \frac{zx}{\sqrt{x^2+(zx)^2}+x}$$

$$z'_x + z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

$$z'_x = \frac{z - z - z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$z'_x = -\frac{z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{(1+\sqrt{1+z^2})dz}{z\sqrt{1+z^2}} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}dz = \int\left(\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}+\frac{1}{z}\right)dz$$

Используем прием изменения направления зависимости: будем реш. не в виде $y = y(x)$, а в виде $x = x(y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$$ => ищем неизвестную ф-цию $x = x(y)$

$$x' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$$

$$x = zy$$

$$z'y + z = \frac{\sqrt{(zy)^2+y^2}+zy}{y}$$

$$z'y + z = \sqrt{z^2+1} + z$$

$$z'y = \sqrt{z^2+1}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|z+\sqrt{z^2+1}| = \ln|y| + \ln|c|$$

$$z + \sqrt{z^2+1} = cy$$

$$\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1} = cy$$

Замечание: изменение направл. зависимости влияет на сложность решения и не изменяет типа ДУ

2 ДУ 1-го порядка, линейные

Опред.: ДУ 1-го порядка вида $y' = P(x)y + Q(x)$ наз. линейным ДУ.

Пример:

N	ДУ	P(x)	Q(x)
1	$y' = \frac{2y}{x} + x^2 + 1$	$\frac{2}{x}$	x^2+1
2.	$y' = 2y + e^x$	2	e^x
3	$y' = x^2 y - 3$	x^2	-3
4	$y' = 5y - 1$	5	-1
5.	$y' = \frac{y}{xy^2+1}$ $x' = \frac{xy^2+1}{y}$ $x' = yx + \frac{1}{y}$	y	$\frac{1}{y}$

Замечание:

Некоторые ДУ можно отнести к нескольким типам. Например:

1) $y' = \frac{y}{x} + 1$, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1 \Rightarrow$ линейное

$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{y}{x} + 1 \Rightarrow$ однородное

2) $y' = 5y - 1$ – линейное

$y' = f(x)\,g(y)$, $f(x) = 1$, $g(y) = 5y - 1 \Rightarrow$ с разд. переменными

Алгоритм решения (метод Бернулли)

$y' = P(x)y + Q(x)$

Ищем реш. в виде произведения $y = u(x)\,v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ - новые неизвестные ф-ции.

$(uv)' = Puv + Q$

$\underline{u'v} + \underline{uv'} = \underline{Puv} + \underline{Q}$

Замечание!

Необходимо следить за порядком слагаемых правой части: 1-е слагаемое должно быть с y, а 2-ое без y.

$$\begin{cases} u'v = Puv & (1) \\ uv' = Q & (2) \end{cases}$$

Эти ДУ в системе — ДУ с разделяющими переменными и реш. в том порядке в котором они записаны в системе.

(1) $u' = P(x) \cdot u \quad f(x) = P(x) \quad , g(u) = u$

$$\frac{du}{dx} = Pu$$

$$\int \frac{du}{u} = \int P dx$$

$$\ln|u| = \int P(x) dx + C$$

Замечание: произв. постоянную C при интегрировании можно положить равную 0 в этом месте, т.к в дальнейшем оно сократится

$$u = \pm e^{\int P dx + C}$$

$$u = \pm e^{C} e^{\int P dx} \quad ; \quad u = C e^{\int P dx}$$

$$C e^{\int P dx} \cdot v' = Q(x)$$

$$v' = \frac{Q(x)}{C e^{\int P dx}} \qquad f(x) = \frac{Q(x)}{C e^{\int P dx}} \qquad g(v) = 1$$

$$\int dv = \int \frac{Q(x)}{Ce^{\int P dx}} dx$$

$$v = \frac{1}{C}\int Q(x) e^{-\int P dx} dx + \tilde{C}$$

$$y = uv = Ce^{\int P dx}\left(\frac{1}{C}\int Q e^{-\int P dx} dx + \tilde{C}\right)$$

$$\boxed{y = e^{\int P dx}\left(\int Q e^{-\int P dx} dx + \tilde{C}\right)}$$ – общее реш. линейного ур-ния

Задача: Найти реш. задачи Коши.

$$\begin{cases} xy' + 2y = 3x^2 - 2x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$xy' = -2y + 3x^2 - 2x$$

$$y' = -\frac{2}{x}y + 3x - 2 \qquad P(x) = -\frac{2}{x},\ Q(x) = 3x - 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ДУ 1го порядка, линейное

$$y = u \cdot v$$

$$u'v + uv' = -\frac{2}{x}uv + 3x - 2$$

$$\begin{cases} u'v = -\frac{2}{x}uv & (1) \\ uv' = 3x - 2 & (2) \end{cases}$$

(1) $$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u$$

$$\int\frac{du}{u} = -\int\frac{2}{x}dx$$

$$\ln|u| = -2\ln|x|$$

$$\ln|u| = \ln|x^{-2}|$$

$$u = x^{-2}$$

$u = \frac{1}{x^2}$

(2) $\frac{1}{x^2} v' = 3x - 2$

$v' = 3x^3 - 2x^2$

$\int dv = \int (3x^3 - 2x^2)\,dx$

$v = \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C$

$y = uv$

$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C\right)$ — общее решение

Замечание: Постоянное интегрирования C возникающее при реш. 1го ДУ размещается внутри скобки

$y(1) = 0$

$0 = 1\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + C\right)$

$0 = \frac{1}{12} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{12}$

Ответ: $y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$ — реш. задачи Коши

3. ДУ 1го порядка. Ур-ние Бернулли

Опр: ДУ 1го порядка вида $y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ наз. ур-нием Бернулли

Примеры

N	ДУ	P(x)	Q(x)	α
1	$y' = x^2 y - x y^2$	x	$-x$	2
2	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{3y}$	$\frac{1}{x}$	x	$-\frac{1}{2}$
3	$y' = 2y + \frac{e^x}{y}$	2	e^x	-1
4	$y = \frac{y}{xy^2 - x^3}$ $x' = \frac{xy^2 - x^3}{y}$ $x' = yx - \frac{x^3}{y}$	y	$-\frac{1}{y}$	3

При реш ур-ния Бернулли используется метод Бернулли

Задача: Найти общ реш ДУ $xy' - y = \frac{x}{y^2}$

$xy' = y + \frac{x}{y^2}$

$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y^2}$ $\quad P(x) = \frac{1}{x}, \ Q(x) = 1, \ \alpha = -2$

$y = uv$

$u'v + uv' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{u^2v^2}$

$$\begin{cases} u'v = \frac{uv}{x} & (1) \\ uv' = \frac{1}{u^2v^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $u' = \frac{u}{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|u| = \ln|x|$

$u = x$

(2) $xv' = \frac{1}{x^2 v^2}$

$\int v^2 dv = \int \frac{dx}{x^3}$

$\frac{v^3}{3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

$v^3 = -\frac{3}{2x^2} + C$

$v = \sqrt[3]{-\frac{3}{2x^2} + C}$

$y = x\sqrt[3]{-\frac{3}{2x^2} + C}$ – общее решение

4. ДУ 1-го порядка полных дифференциалов

Опред.: ДУ 1го порядка в дифф-ной форме вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $\boxed{P'_y = Q'_x}$, назыв. ур-нием полных дифференц.

Замечание: ур-ние в полных дифференц. может быть записано в эквивалентном виде: $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $\boxed{P'_y = Q'_x}$

Примеры

N	ДУ	P	Q	Проверка условия
1	$(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$	x^2+y^2	$2xy$	$P'_y = 2y$ $Q'_x = 2y$
2	$y' = -\frac{3x^2y+y^2}{x^3+2xy+10}$	$3x^2y+y^2$	$x^3+2xy+10$	$P'_y = 3x^2+2y$ $Q'_x = 3x^2+2y$

Алгоритм решения

Теорема (без док-ва). Если $P_y = Q_x$, то

1) сущ. $u(x,y)$: $du = P\,dx + Q\,dy$

2) $u = C$ - общ. интеграл ур-я $P\,dx + Q\,dy = 0$

Замечание: Если $du = P\,dx + Q\,dy \Rightarrow$

$$\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$$

Задача. найти общ. интеграл

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

$$\begin{cases} u'_x = x^2 + y^2 & (1) \\ u'_y = 2xy \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow u = \int (x^2 + y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + y^2 x + C(y)$

$(2) \Rightarrow \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x + C(y)\right)'_y = 2xy$

$2yx + C'(y) = 2xy$

$C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C$

$\Rightarrow u = \frac{x^3}{3} + y^2 x + C$

Общий интеграл $\boxed{\frac{x^3}{3} + y^2 x = C}$