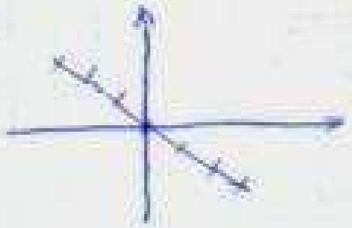
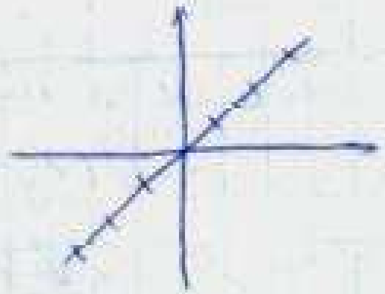
$f(x,y) = C \qquad -\frac{y}{x} = C \qquad y = -x$



$C = 1$

$C = -1 \quad y = x$



Лекция 8

лекция 8

1 ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Все ДУ 1-го порядка можно разбить на типы, каждый из типов решается своим методом, поэтому зад. распознавания типа явл. одной из основных задач.

Опред.: ДУ 1-го порядка вида $y' = f(x)\cdot g(y)$ называется ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Примеры:

N	ДУ	f(x)	g(y)
1	$y' = x^2\sqrt{y}$	x^2	$\sqrt{y}$
2	$y = \frac{x^2}{\sqrt{y}}$	x^2	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
3	$y' = x^2$	x^2	1
4	$y' = \sqrt{y}$	1	$\sqrt{y}$

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Алгоритм решений

$y' = f(x)\cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$

$dy = f(x)\cdot g(y)dx$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, $g(y)\neq 0$ если $g(y)=0$ рассмотрим отдельно

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ — общий интеграл

Пример 1

$(x^2+1)y' = x\sqrt{1-y^2}$

Любое ДУ 1-го порядка нач. с выражения y'

$y' = \frac{x}{x^2+1}\cdot\sqrt{1-y^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $g(y) = \sqrt{1-y^2}$

ДУ 1-го порядка с разд. переменными

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}\sqrt{1-y^2}$

$dy = \frac{x}{x^2+1}\sqrt{1-y^2}\,dx \,/\, \sqrt{1-y^2}\neq 0$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{x^2+1}dx$

$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + C$, $\int\frac{x}{x^2+1}dx = \int\frac{d\frac{x^2}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

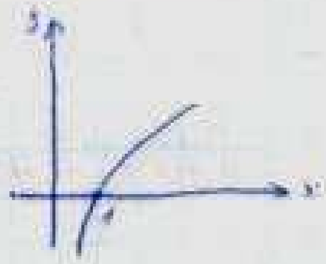
$\arcsin y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ — общ. интеграл

$\arcsin y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln|C| \quad C \neq 0$

$2\arcsin y = \ln|C(x^2+1)|$

$\arcsin y = \ln\sqrt{|C(x^2+1)|}$

$y = \sin\ln\sqrt{|C(x^2+1)|} \quad C \neq 0$



Случай $\sqrt{1-y^2}=0$ $\quad y=1$ или $y=-1$ — реш.

Общее решение

$$y = \begin{cases} \sin\ln\sqrt{|C(x^2+1)|}, & C \neq 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

Пример 7

Задача Коши $\quad y' = x\sqrt{y}$, $\; y(0)=1$ $\quad$ Пров. выполнен. услов. т Коши

$f(x,y) = x\sqrt{y}$

1) $f(x,y)$ непрерывн. в окр. $M_0(0,1)$

2) $f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ непрерывн. в окр. $M_0(0,1)$

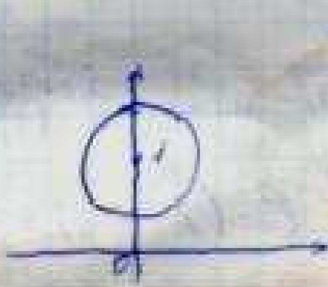
$\Rightarrow$ задача Коши имеет ед. решение

$y' = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\; f(x)=x$, $\; g(y)=\sqrt{x}$ $\Rightarrow$

ДУ 1-го порядка с разд. переменными

$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$

$dy = x\sqrt{y}\,dx \quad y \neq 0$



$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x\,dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2\sqrt{1} = \frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 2$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 1$$

$y = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2$ – реш. задачи Коши

Иногда ДУ 1-го порядка записывают в виде дифференциалов:

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

Из этого вида можно получить вид обыкновенного ДУ делением на dx

$$f(x,y) + g(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$$

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

Пример 3

Найти общее решение ДУ

$$y^2 dx + e^x dy = 0 \quad | : dx$$

$$y^2 + e^x \frac{dy}{dx} = 0$$

$y^2 + e^x y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{e^x}$; $y' = -y^2 \cdot \frac{1}{e^x} \Rightarrow$

$f(x) = \frac{1}{e^x}$, $g(y) = -y^2$ = ДУ 1го порядка с разд. переменными

Замечание:

Вообще говоря при распознавании этого ДУ мы сделали шаг назад в реш. этого ур-ния

$y^2 dx = -e^x dy \quad / y^2 = 0 / : e^x$

$\int \frac{dx}{e^x} = -\int \frac{dy}{y^2}$

$\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} + c$

$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c$

$-e^{-x} = \frac{1}{y} + c$ - общий интеграл

$\frac{1}{y} = -e^{-x} + c$

$y = \frac{1}{c - e^{-x}}$

Случай: $y = 0$ - решение.

Ответ: Общее реш. $y = \begin{cases} \frac{1}{c - e^{-x}} \\ 0 \end{cases}$, $c \in R$

2. ДУ 1го порядка однородные

Опред.: ДУ 1го порядка вида $y' = f(x, y)$, где для любого $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ наз. ДУ 1го порядка однородным.

Пример:

N	ДУ	Проверка усл. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$
1	$y' = \frac{2x-y}{x+y}$	$f(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}$; $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda(2x-y)}{\lambda(x+y)} = f(x,y)$
2	$y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$	$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$; $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}}{\lambda x} = \frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = f(x,y)$

Алгоритм решения

Ищем реш. в виде $y = z(x)\cdot x$, где $z(x)$ - новая неизвестная ф-ция

$$(z\cdot x)' = f(x, zx)$$

$$z'x + zx' = f(x, zx)$$

$$z'x + z = f(x\cdot 1;\ x\cdot z)$$

$$z'x + z = f(1, z)$$

$$z'x = f(1,z) - z$$

$$z' = (f(1,z) - z)\frac{1}{x}$$ - ДУ 1го порядка с разд. переменными

Замечание

ДУ 1го порядка с разделяющимися переменными явл. базовым в том смысле, что любой другой тип будет сводиться к нему.

Далее реш. ДУ с разд. переменными после получ. реш. необходимо вернуться к старой неизвестной: $z = \frac{y}{x}$

Пример 1

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x, y)$$

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{zx}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + (zx)^2}}{x}, \quad x > 0$$

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}$$

$$z'_x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$z' = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{1}{x}$$

$$dz = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|cx|$$

В силу монотонности ф-ции $y = \ln(x)$, в силу произвольной постоянной $c > 0$ =>

$$z + \sqrt{z^2+1} = cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx$$ — общий интеграл

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2 \qquad x > 0$$

При $x < 0$ $\quad y - \sqrt{x^2 - y^2} = c$

Лекция 9

1. Прием реш ДУ путем изменения "натуральной" зависимости

лекция 9

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$ (см. зад. о форме зеркала)

Если решать обычным способом — однородное ур-ние

$$y = zx$$

$$z'_x + z = \frac{zx}{\sqrt{x^2+(zx)^2}+x}$$

$$z'_x + z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

$$z'_x = \frac{z - z - z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$z'_x = -\frac{z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{(1+\sqrt{1+z^2})\,dz}{z\sqrt{1+z^2}} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}\,dz = \int\left(\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{z}\right)dz$$