24.04.13

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Задачи приводящие к ДУ.

Задача №1

Пусть точка движется так, что движение пропорционально пройденному пути. В начальный момент времени t находится на расстоянии 1 м от начала координат, через 2с она находится на расстоянии 2 м от НК. Найти закон прямолинейного движения материальной точки.

$x = x(t)$ - закон движения

$$\begin{cases} v = x' = k\cdot(x-1) \\ x(0) = 1 \\ x(2) = 2 \end{cases} \qquad x' = k(x-1) \text{ - ДУ}$$

Замечание: коренное отличие ДУ от обычных алгебраич. ур-й в том, что решениями алгебраич. ур-й являются числа, а ДУ - ф-ии

Задача №2

Скорость охлажд. тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха - ($t_{возд} = 20°$)

Известно что в течении 20 минут

тело охладилось от 100° до 60°. Определите закон охлаждения t тела.

$u = u(t)$ - температура тела в момент времени

$$\begin{cases} u'(t) = k(u(t) - 20) \\ u(0) = 100^\circ \\ u(20) = 60^\circ \end{cases}$$

Задача №3.

Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения солнечного тела св-ми, что все лучи, исходящие из точечного источника света, помещенного в т. О, отражались зеркалом в оси Ох

Задача №4.

Тело движется прямолинейно со скоростью пропорционально времени движения. Найти закон движения тела, если за 10с оно прошло 20м, а за 20с 35м, какой путь тело пройдет за 1 мин 40 сек.

$x = x(t)$ - закон движения

$$\begin{cases} x' = kt \\ x(10) = 20 \\ x(20) = 35 \\ x(100) - ? \end{cases}$$

(из физ $\Rightarrow x(t)$ явл. первообразной для ф-ии $kt \Rightarrow$)

$x(t) = \int kt\,dt = k\frac{t^2}{2} + C$

$x(t) = \frac{k}{2}t^2 + C$

$x(10) = \frac{k}{2}10^2 + C = 20$

$x(20) = \frac{k}{2}20^2 + C = 35$

$$\begin{cases} 100h + 2c = 40 \\ 400h + 2c = 70 \end{cases}$$

$300h = 30$

$h = \frac{1}{10}$

$2c = 40 - 100h = 40 - 30 = 30$

$c = 15$

$x(t) = \frac{t^2}{20} + 15$

$x(t) = \frac{100^2}{20} + 15 = \frac{10000}{20} + 15 = 515$

2. Основные понятия связанные с ДУ

Опр: Ур-е вида $F(y', y, x) = 0$, где $y = y(x)$ — неизвестная ф-ция и производ. y' относительно наз-ся ДУ 1-го порядка.

Замечания: порядок ДУ определяется порядком старшей производной неизв. ф-ции входящей в ДУ.

Опр: Ур-е вида $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$, где $y(x)$ — неизв. ф-ция неизвестная, $y^{(n)}$ производная относительно наз-ся ДУ n-го порядка.

Опр: ДУ вида $y' = f(x, y)$ наз-ся ДУ разрешенным относительно старшей производной.

Опр: ДУ вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

нау-ся ду 1-го порядка записанное в дифференциалах

Замечания

1) Ду ур-ие в дифф. можно записать в виде ур-ия разрешенного относительно производной

1) $Pdx + Qdy = 0$ $\quad\quad | : dx$
$P + Q\frac{dy}{dx} = 0$ $\quad\quad \frac{dy}{dx} = y'$
$P + Qy' = 0$ $\quad\quad y' = -\frac{P}{Q}$

2) ур-е разрешенное относительно производной можно записать в виде ур-е дифференц.

2) $y' = f(x, y)$ $\quad\quad y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad | \cdot dx$

$dy = fdx \quad\quad fdx - dy = 0$

3) Ур-е дифференц. выгодно тем, что исходную зависимость между x и y можно искать как в виде функции $y = y(x)$, так и в $x = x(y)$. $\quad Pdx + Qdy = 0 \quad | : dy$
$P\frac{dx}{dy} + Q = 0$
$Px'_y + Q = 0$

Опр: Ф-ия $y = y(x)$ является решением ду если при подстановке ф-ии в это уравнение будет верное равенство

Опр: Общими решениями ДУ назов. множество всех решений ДУ, записанное в виде $y = y(x, C)$, где

C – пробегает некоторое числовое множество и для каждого C $y = y(x, C)$ представляет собой частное решение.

Пример: $y'(x)$

Решением является первообразная для x:

$y(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

$y(x) = \frac{x^2}{2} + C$ – общее решение

Если $C = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ – част. решен.

Если $C = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2}$ – част. решение

Опр: Уравн. вида $\Phi(x, y) = 0$, задающее неявным способом частное решение ДУ наз-се частным интегралом ДУ

Опр. Уравн. вида $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее неявным способом общее решение ДУ наз-се общим интегралом ДУ

Замечание: Очень часто при решении ДУ не возможно, а иногда и нельзя, решение оставляют в неявной форме

Опр: Процесс решения ДУ часто называют ~~решением~~ интегрированием ДУ

Опр: Графиком решения ДУ назыв. интегр. кривой

3. Задачи Коши для ДУ

Очень часто при решении ДУ требуется найти не общее решение, а частное решение, удовлетв. опред. условию

Опр: Задачей Коши назыв. задача отыскания решения ДУ $y' = f(x;y)$, удовл. начальному условию $y(x_0) = y_0$

Сокращенная запись задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Ковалевской (о существ. и единств. решения задачи Коши)

Пусть $\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, где $f(x;y)$, $f'_y(x;y)$ - непрерывн. ф-ии в некот. окрест. т. $M_0(x_0;y_0)$

Тогда в окрестности т. x_0 существ. единственное решение задачи Коши: $y = y(x)$

Пример: $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

имеет ед. решение, т.к. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

$$f'_y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2}+x)^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)^2}$$

$M_0(1,1) \in D(f)$, $M_0(1,1) \in D(f'_y) \Rightarrow$

f, f'_y – непрерывн в т. M_0 и в некоторой ее окрестности $\Rightarrow$ сущ. ед. реш. задачи Коши

$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ для этой задачи условия теоремы Коши не выполняются

4. Понятие изоклин

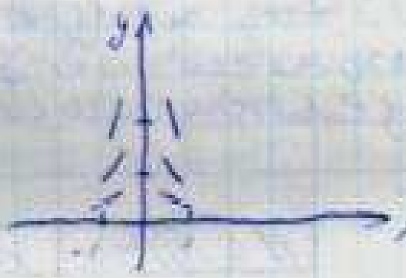
Любое ДУ типа $y' = f(x,y)$ задает на пл-ти поле направлений

$y' = -\dfrac{y}{x}$

$f(1,1) = -1$

$f(-1,1) = 1$

$f(1,2) = -2$

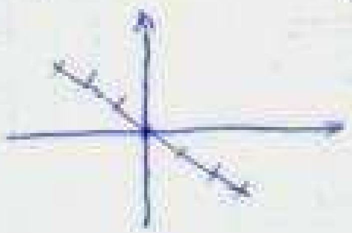


Решение ДУ превращается в поиск таких интегральных кривых, кот касаются поле заданных поле направл.

Геометрическое место т. плоскости кот поле направлено постоянно наз. изоклиной.

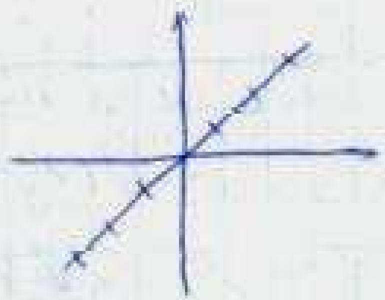
Ур-ние изоклин имеет вид:

$f(x,y) = C$ $\quad -\frac{y}{x} = C$ $\quad y = -\frac{x}{x}$



$C = 1$

$C = 1 \quad y = x$



Лекция 8

лекция 8 **1 ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными**

Все ДУ 1-го порядка можно разбить на типы, каждый из типов решается своим методом, поэтому зад. распознания типа явл. одной из основных задач.

Опред.: ДУ 1-го порядка вида $y' = f(x) \cdot g(y)$ называется ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Примеры:

N	ДУ	$f(x)$	g_x
1	$y' = x^2\sqrt{y}$	x^2	$\sqrt{y}$
2	$y = \frac{x^2}{\sqrt{y}}$	x^2	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
3	$y' = x^2$	x^2	1
4	$y' = \sqrt{y}$	1	$\sqrt{y}$

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$