б) Свойства

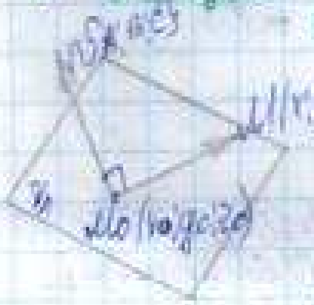
1) Любая точка параболы равноудалена от директрисы и фокуса

2) Расстояние от точки параболы до фокуса пар-лы, называемым радиусом, которое равен

$r = x + \frac{p}{2}$, где x - абсцисса точки M

Аналитическая геометрия в пространстве 1.11.12

1. Общее уравнение плоскости



$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{n} \Leftrightarrow$

$\overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0$

$\overline{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\} \Leftrightarrow Ax+By+Cz+$

$+D=0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Опр: уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ наз-ся общим уравнением плоскости.

Замечание:

1) Любое уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$ является уравнением некоторой плоскости $\perp \overline{n}\{A;B;C\}$

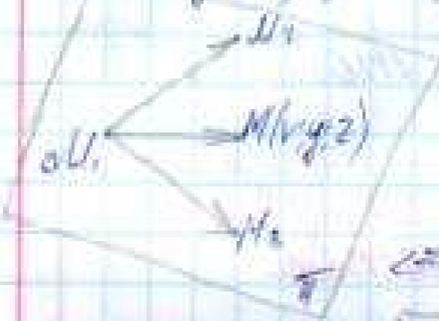
2) Уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0) \perp \overline{n}\{A,B,C\}$ имеет вид

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

3) Для любой плоскости в пространстве существует такое уравнение

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$



$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ - компланарны

$\Leftrightarrow \overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Опр: Последнее уравнение называется уравнением проходящим через три точки

Задача

Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_1(-1;0;2)$ $M_2(0;-3;-1)$ $M_3(2;1;0)$

Решение:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &(x+1)9 - y\cdot 7 + (z-2)10 = 0 \\ &9x - 7y - 10z - 11 = 0 \end{aligned}$$

3. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть П: $Ax+By+Cz+D=0$, где $A\neq0, B\neq0, C\neq0, D\neq0$

$$Ax+By+Cz=-D$$

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \qquad \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$ - уравнение плоскости в отрезках

Комментарий:

Геометрический смысл a, b, c

1) $x=a$ $y=b$ $z=c$ - это точки пересечения плоскости с осями $Ox; Oy; Oz$

2) Не всякие плоскости могут быть записаны уравнением в отрезках

4. Построение плоскостей в системе координат $Ox; Oy; Oz$.

Пример 1. построить фрагмент плоскости $2x-y-4z=4$

Решение:

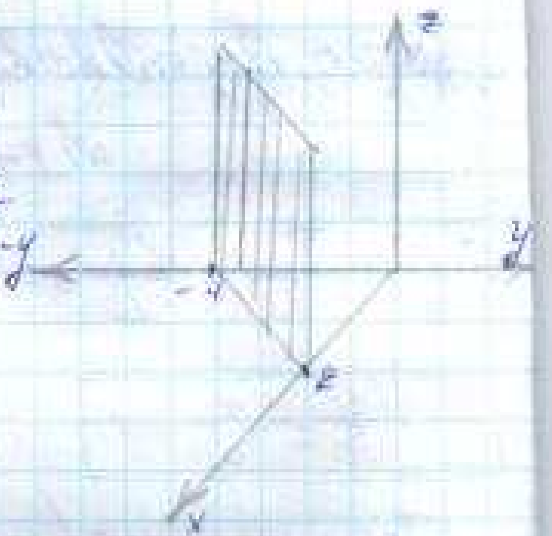
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{-1}=1$$

Пример 2.
(плоскости цилиндрического типа)

Опр: Уравнение поверхности в которой отсутствует одна из неизвестных величин $(x; y; z)$ называется поверхностью цилиндрического типа

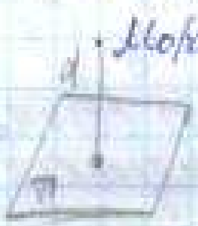
$2x - y = 4 \qquad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

Построенные линии называются направляющими



5. Полезные формулы для плоскости.

1) Расстояние до плоскости $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$



$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2) Угол между плоскостями

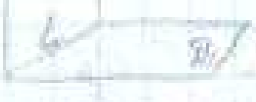
$\pi_1 = A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2 = A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

φ - острый

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

6. Общее уравнение прямой



$\pi_1 = A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2 = A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$X \in \ell \Leftrightarrow \begin{cases} X \in \pi_1 \\ X \in \pi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

наз-ся общими уравнениями прямой

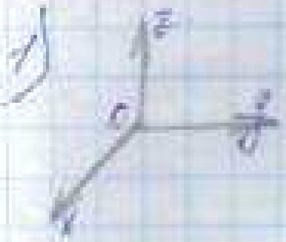
Комментарий

1) Общие ур прямой могут быть записаны неоднозначно

2) Любая прямая может быть записана общими уравнениями

Примеры:

1)



Прямая Ox: $\begin{cases} z=0 - Oxy \\ y=0 - Oxz \end{cases}$

2) l: $\begin{cases} x-2y+4z-1=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$

Найти направляющий вектор прямой

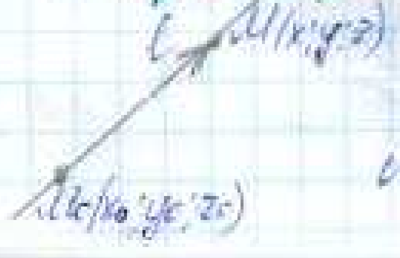
Решение: Найдём 2 точки на пр-ой

1) $x=0 \quad z=0 \Rightarrow -2y-1=0 \quad y=-\frac{1}{2} \quad M_1(0;-\frac{1}{2};0)$

2) $y=0 \quad \begin{cases} x+4z-1=0 \\ x+3z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z-1=0 \Rightarrow z=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad M_2(-3;0;1)$

$\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{-3; \frac{1}{2}; 1\} \quad \bar{a}_1 = \{-6; 1; 2\}$

7. Каноническое уравнение прямой в пространстве



$\bar{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$

$M \in l \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$

Опр: Каноническое отношение проекции плоскости направляющих называются каноническими для прямой с координатами

Из канонических ур-й можно получить параметрические если приравнять уравнение плоскости к t

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = t$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha} = t \\ \frac{y-y_0}{\beta} = t \\ \frac{z-z_0}{\gamma} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пример $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ $\pi: 2x - y + z - 4 = 0$

- выяснить взаимное расположение прямой и плоскости:

Решение:

$2(-2+3t) - t + 4 - t - 4 = 0$

$-4 + 6t - 2t = 0 \quad 4t = 4 \quad t = 1$

Возможные ситуации:

а) Уравнение не имеет решений в этом случае прямая ∥ плоскости

б) Ур-е имеет бесконечное множество решений (0=0) - в этом случае прямая полностью лежит в плоскости

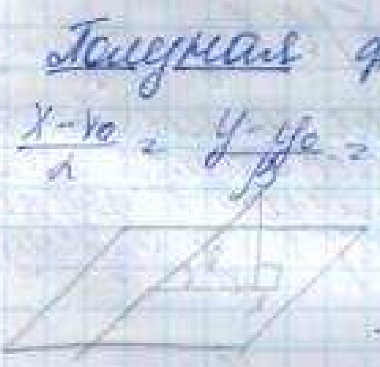
в) Ур-е имеет единственное решение (наш случай $t=1$) - в этом случае существует единственная точка пересечения

$$M_0\begin{cases} x = -2+3\cdot 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = 4-1 = 3 \end{cases}$$

$M_0(1;1;3)$ - ее точка пересечения

Полезная формула

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = 0$$



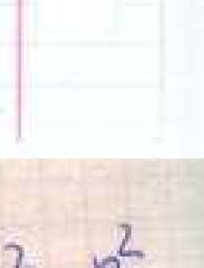
$\pi = Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

12. Поверхности 2го порядка

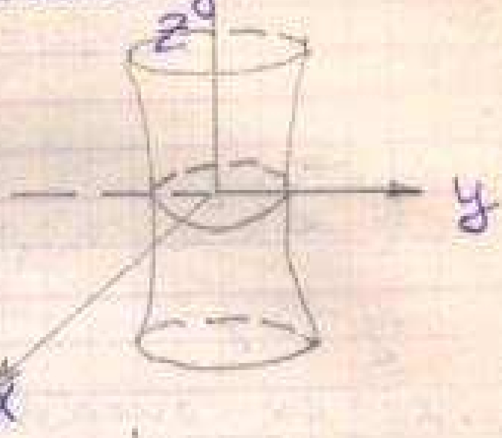
а) шар: $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$

б) эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



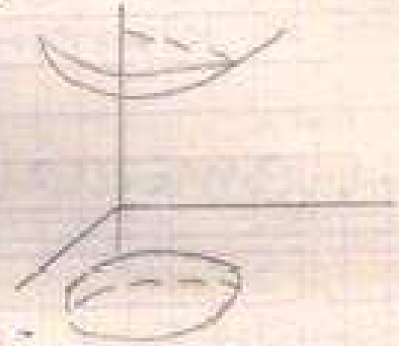
в). однополостной гиперболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



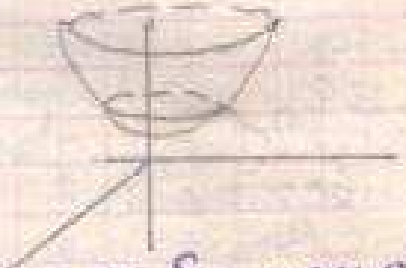
г). двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



д). эллиптический параболоид

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



ж). гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

з). Конус.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Обычно при решении задач у-ние поверхности имеют измененный вид: например:

$$z=4-x^2-y^2$$

$$x^2+y^2=-(z-4)$$

с переменными ур-ниями возможны преобразования.

1). $x \to -x$ осевая симметрия от-
тельно пр-ма Oy?

2). $y \to -y$ . . . . Ox?
$x \to x-a$ параллельный перенос
оси Ox

$y \to y-a$ — " —

3). $x \to kx$ - сжатие, если $k>1$, вдо
к раст., если $k<1$ свк

Номографический анал