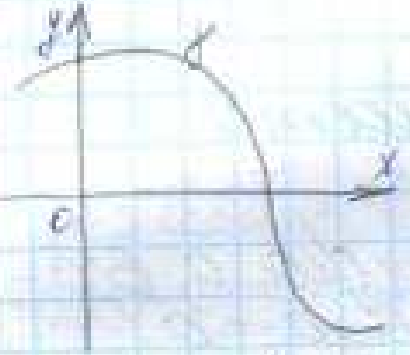
Аналитическая геометрия (на плоскости)

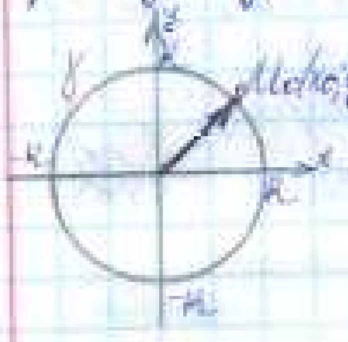
1. Понятие уравнения криво[й на] плоскости



Опр: Уравнение Ф(…
наз. ур. уравнением …
если б если $M_0(x_0;$ …
$Ф(x_0;y_0)=0$

Пример.

γ – окружность с центром в т… радиуса R



$M_0(x_0;y_0) \in \gamma \Leftrightarrow |M_0O| = $ …
$\Leftrightarrow |\vec{OM_0}| = R$

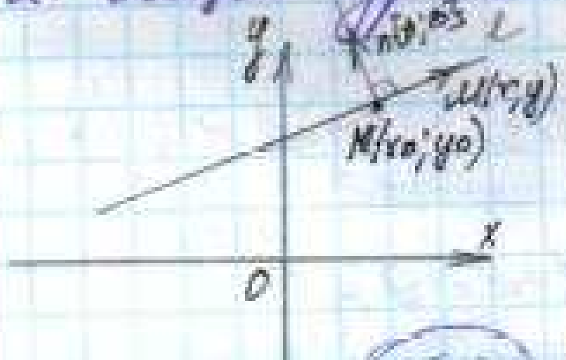
$\vec{OM_0}\{x_0;y_0\} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+y_0^2} = R \Leftrightarrow$ …

Ур-е окружности: x^2+y …

Замечание:

Уравнение окружности с цен[тром] в точке $M_0(a;b)$ и радиуса … вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

2. Общее уравнение прямой н…



$M(x;y) \in \ell \Leftrightarrow M_0$ …

$\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$

$\vec{M_0M} = \{x-x_0;y-y_0$ …

$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ax+By\underbrace{-Ax_0-By_0}_{C}=0$

$Ax+By+C=0$

Опр: Ур-е $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой на плоскости

Замечание:

1) Уравнение прямой проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)\perp \bar n=\{A;B\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

2) Любое уравнение вида $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$, является уравнением некоторой прямой, перпендикулярной к вектору $\bar n=\{A;B\}$ ($\perp$ вектор к прямой наз-ся нормалью для прямой)

3) Общее ур-е назыв. универсальным в том смысле, что любая прямая м/б задана общим уравнением.

3. Каноническое уравнение прямой

Вектор $\bar a\parallel\ell$ – называется направляющим вектором для прямой

$\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$

т. $M(x;y)\in\ell\Leftrightarrow\overline{M_0M}\parallel\bar a\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\Leftrightarrow$

Опр: Соотношение пропорциональности

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ наз-ся каноническ
уравнением прям

Замечание:

1) Отношение пропорциональ
$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ истинно $\Leftrightarrow \beta(x-x_0) =$

2)

$\bar{a} = M_1M_0 = \{x_0 - x_1; y$

$M_0 = M_1$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - ур-е пр
проходящ
через M

Задача:

$M_0(1;-2)$ $2x-3y+4=0$ $(M_0 \notin l)$

Найти ур-е прямой проходящ
через M_0

а) $\parallel l$ б) $\perp l$

а) $m \parallel l$
$\bar{n} \perp l$ $\Big| \Rightarrow \bar{n} \perp m$

Замечание 1 $\Rightarrow$ ур. m имеет ви

$2(x-1) - 3(y+2) = 0$ $2x-3y-8=0$

б) $l \perp m$
$\bar{n} \perp l$ $\Big|$ $m \parallel \bar{n}$

Выписываем каноническ

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} \Rightarrow -3x+3 = 2y+4$

$-3x-2y-1=0 \qquad 3x+2y+1=0$

4. Параметрическое уравнение прямой

$M_0(x_0;y_0)$, $M(x;y)$

$M \in \ell \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow$

$\exists t \in \mathbb{R}: \overline{M_0M} = t\bar{a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

Опр: Полученная система наз-ся параметрическими уравнениями прямой

Замечания:

1) Параметр t является коэффициентом растяжения $\bar{a}$ до вектора $\overline{M_0M}$

2) Параметрическое уравнение как и каноническое ур-е может быть записано для любой прямой на плоскости.

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть $\ell: Ax+By+C=0$, где $B \neq 0$

$By = -Ax - C \qquad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

$y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$

$b = -\frac{C}{B}$

Выясним геометрический смысл k и b

1. b — указывает на точку пере[сечения] с осью Oy

2. k — равен tg угла наклона п[рямой]

Углом наклона прямой на[зывается угол] на который нужно повернуть [против] часовой стрелки ось абсцисс [до совпадения с] прямой

$k = tg\alpha$, т.к. $tg\alpha = \frac{y_0 - b}{x_0}$

$(x_0; y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b$

$tg\alpha = \frac{kx_0 + b - b}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k$

Опр: ур-е $y = kx + b$ называется [уравнением] прямой с угловым ко[эффициен]том

Замечание:

1) Уравнение прямой проходящей [через точку] $M(x_0; y_0)$ с угловым k (угловым [коэффициентом]) имеет вид

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

Док-во.

$M \in k \Rightarrow y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - k[x_0]$

Ур-е прямой $y = kx + y_0 - kx_0$

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

2) Две прямые l: $l_1: y = k_1x + b_1$

$l_2: y = k_2x + b_2$

$l_2 \parallel l_1 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

3) Прямые $\parallel$ оси Oy не могут быть заданы уравнением с угловым коэффициентом

6. Уравнение прямой в отрезках

$l: Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$ $B \neq 0$ $C \neq 0$

$Ax + By = -C$ $\quad -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$

$-\frac{x}{C/A} - \frac{y}{C/B} = 1$ $\quad a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Опр: полученное уравнение называют уравнением прямой в отрезках

Геометрический смысл a и b

a и b – указывают на точки пересечения прямой с осями соответственно a с Ox и b с Oy

Правило

Для нахождения точки пересечения 2-х линий нужно решить систему уравнений этих линий

$Ox: y = 0$ $\quad l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=a \end{cases} \qquad \frac{x}{a}=1 \quad x=a$$

$y=0$ ...

$\Rightarrow M_1(a;0)$ – т. пересечения l с Ox
$M_2(0;b)$ – т. ... l с Oy

Задача:

Составить ур-е прямой, пере... Ox и Oy в точках $x=-1$ $y=2$

Решение: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$ $\quad 2x-y=$ ...

$2x+2=y \qquad 2x-y+2=0$

$y=2x+2$

Лекция

1 Расстояние от точки до пр...

$l: Ax+By+C=0 \Rightarrow$ ...

Формула d:

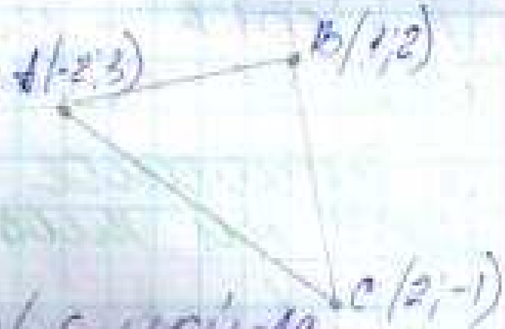
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Вывод: $d=|пр_{\vec{n}}\,\overline{M_0M}|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overline{M_0M}}{|\vec{n}|}\right|=$ ...

$$=\frac{|Ax+By-Ax_0-By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-Ax_0-By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\ ...$$

Задача

Найти BD-высоту



Решение

Найдём уравнение прямой AC

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \frac{x+2}{2+2} = \frac{y-3}{-1-3} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-4}$$

$$-(x+2) = y-3 \qquad y-3+x+2=0$$

$$y+x=1 \; AC \qquad y+x-1=0$$

$$BD = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2. Нормальное уравнение прямой

$$l: Ax+By+C=0 \qquad /\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$$mx+ny+p=0$$

Опр: $|p| = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$|p|$ - расстояние от начала координат до указанной линии

$\bar{n}_0 = \{m; n\}$ - единичный нормальный вектор

т.е. $m^2+n^2 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2} = 1 \Rightarrow m = \cos\alpha$

$n = \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора и прям

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $y=k_1x+b_1$

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, $y=k_2x+b_2$

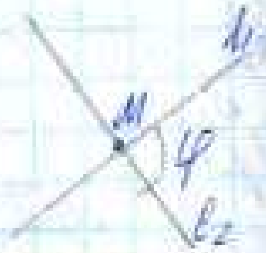
а) $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ или

$\begin{cases}k_1=k_2\\ b_1=b_2\end{cases}$

б) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\ne\frac{C_1}{C_2}$ или

$\begin{cases}k_1=k_2\\ b_1\ne b_2\end{cases}$

в) $l_1 \cap l_2 = M$



$\frac{A_1}{A_2}\ne\frac{B_1}{B_2}$ либо $k_1\ne k_2$

Случай 1:

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$ или

$\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$

Случай 2: φ – острый угол

$\cos\varphi = \frac{|\bar n_1\cdot \bar n_2|}{|\bar n_1|\cdot|\bar n_2|} = \frac{|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$