$y = \frac{0+2\cdot 0}{\frac{1}{2}+2} = 0$ В $M\left[\frac{2}{3}; 0\right]$

4. Скалярное произведение 2-х ве-ров

Опр: Скалярное произведение 2-х векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется число

$\bar a \cdot \bar b = |\bar a||\bar b|\cos\varphi$

Скалярное произведение в координатной форме

$\bar a = \{x_a; y_a\}$ $\bar b = \{x_b; y_b\}$

св-ва скалярного произведения (св-ва)

1) $\lambda(\bar a+\bar b) = \lambda\bar a + \lambda\bar b$
2) $(\lambda+\mu)\bar a = \lambda\bar a + \mu\bar a$ Основные св-ва действий векторов
3) $\bar a+\bar b = \bar b+\bar a$
4) $(\bar a+\bar b)+\bar c = \bar a+(\bar b+\bar c)$
5) $\bar a\cdot\bar b = \bar b\cdot\bar a$
6) $\bar a\cdot(\bar b+\bar c) = \bar a\cdot\bar b+\bar a\cdot\bar c$
7) $(\lambda\bar a)\bar b = \lambda\cdot(\bar a\cdot\bar b)$

Замечание:

Скалярное произведение удовлетворяет тем-же свойствам что произведение чисел, за искл

Условие перпендикулярности:

$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Теорема: $\bar{a} = \{x_a; y_a\}$, $\bar{b} = \{x_b; y_b\} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b$

Доказательство

$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j}$ $\quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_a i + y_a j)(x_b i + y_b j) = x_a x_b i^2 + \underline{x_a y_b ij} + \underline{y_a x_b j i} + y_a y_b j^2 = \underline{x_a x_b + y_a y_b}$ т.к.

$i \perp j \quad i^2 = 1,\ j^2 = 1$

5. Вычисление углов:

$\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}||\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}||\bar{a}| = |\bar{a}|^2$

$\boxed{\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$

$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = x_a x_a + y_a y_a = x_a^2 + y_a^2$

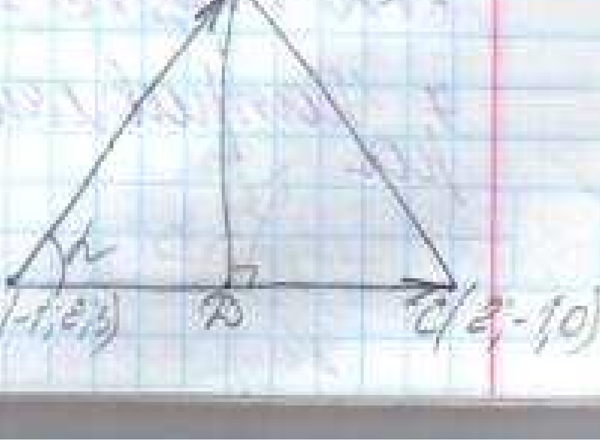
$|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

$\cos\varphi = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{y_b^2 + x_b^2}}$

Задача:

Найти $\cos\alpha$

$\overline{AB} = \{1; 2; 6\}$



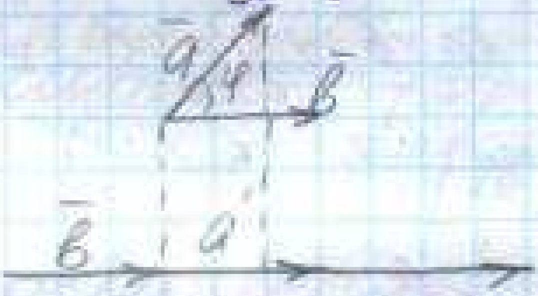
$\bar{AC} = \{3; -3; -3\}$

$\cos\alpha = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot(-3) + (-6)\cdot(-3)}{\sqrt{1+4+36}\cdot\sqrt{9+9+9}} = \frac{15}{\sqrt{41}\cdot ...}$

$= \frac{5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{3}}$

$\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{3}}$

6. Вычисление проекции вект... на ось другого вектора.



проекция $\bar{a}$ на ... $= |\bar{a}|\cdot\cos\varphi$

(из метрических соотношений в прямоугольном Δ)

$пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cdot\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$

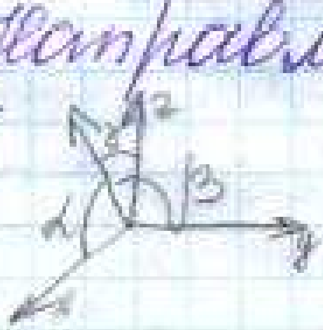
$пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$

Задача: в ΔABC (см. предыдущ... ту AD

Решение:

$AD = пр_{AC}\bar{AB} = \frac{\bar{AB}\cdot\bar{AC}}{|AC|} = \frac{15}{\sqrt{27}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

7. Направляющие косинусы ...ра



α, β, γ – это углы о... вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy, Oz

Опр: Косинус α, β, γ - наз-ся направляющими косинусами вектора

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$

$x_a = пр_x \bar{a} = |\bar{a}| \cos\alpha$ (см ⑤)

$\cos\alpha = \frac{x_a}{|a|}$

Аналогично:

$\cos\beta = \frac{y_a}{|a|}$ $\cos\gamma = \frac{z_a}{|a|}$

Свойства направляющих косинусов:

1) $\bar{a}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ - это единичный вектор сонаправленный с вектором $\bar{a}$ (орт вектора $\bar{a}$)

$\bar{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{x_a}{|a|}; \frac{y_a}{|a|}; \frac{z_a}{|a|}\right\} =$

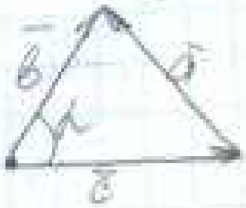
$= \frac{1}{|a|}\{x_a; y_a; z_a\} = \frac{1}{|a|}\cdot\bar{a}$

$\bar{a}_0 = \frac{1}{|a|}\bar{a} \Rightarrow \begin{cases}|\bar{a}_0| = 1\\ \bar{a}_0 \uparrow\uparrow \bar{a}\end{cases}$

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ из 1 св-ва

10.10.12 ① Применение скалярного в... векторов в планиметрии

а) Теорема косинусов



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$

$a^2 = |\bar{a}|^2 = |\bar{b} - \bar{c}|^2$

Используем формулу из прош... лекции

$|\bar{a}|^2 = \bar{a}^2 = (\bar{b} - \bar{c})^2 = (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}^2 - \ldots$
$+ c^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - 2|\bar{b}||\bar{c}|\cos\alpha = b^2 + c^2 - \ldots$

б) Рассмотрим парал-ма и... поним...

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$
$d_1 = a + b$
$d_2 = a - b$

$\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2 = |\bar{d}_1|^2 + |\bar{d}_2|^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = \ldots$
$(\bar{a} - \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = \ldots$
$= 2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2$

Векторным произведением 2-х ... в-ров $\bar{a}$ и $\bar{b}$ наз-ся вектор $\bar{c}$ = ...

1) $|c| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha = S_{пар}$

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$
Направлен по правилу пра... ки (буравчика)

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
2. $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$
3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{c}\bar{a} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$ - условие коллинеарности 2-х векторов

3. Векторное произведение в координатной форме:

Теорема: Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = \{xa; ya; za\} \\ \bar{b} = \{xb; yb; zb\} \end{array}\right\| \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ xa & ya & za \\ xb & yb & zb \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} \\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} \end{array}\right\}$$ проверяется из определения векторного произведения

$|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \times |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$

$\bar{i} \times \bar{i} = 0$

$\left.\begin{array}{l} (\bar{i} \times \bar{j}) \perp \bar{i} \\ \perp \bar{j} \end{array}\right| \Rightarrow \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$

$\bar{j} \times \bar{j} = 0 \qquad \bar{k} \times \bar{k} = 0$

$\bar{a} \times \bar{b} = (xa\, i + ya \cdot j + za \cdot k) \times (xb\, i + yb\, j + zb\, k) =$

$= \underline{xa\, i \times xb\, i} + xa\, i\, yb\, i \times j + xa \cdot zb\, i \times k +$

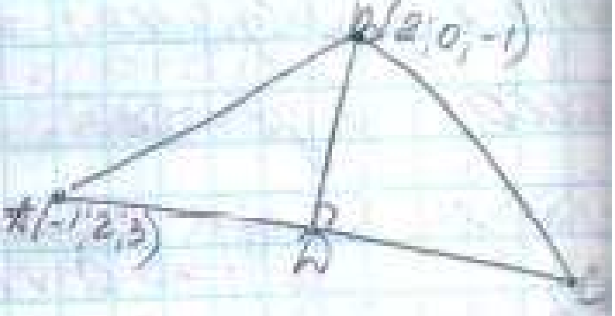
$y_a x_b\, j \times i + \cancel{y_a y_b\, j \times j} + y_a z_b\, j \times k +$
$+ z_a x_b\, k \cdot i + z_a y_b\, k \times j + \cancel{z_a z_b\, k \times k} =$
$= (x_a y_b - y_a x_b)\, k + (z_a x_b - x_a z_b) \cdot j + \ldots$
$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k =$
$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

Задача:

Найти:

S_{ABC} - ?

BD - ?



Решение:

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{пар}$ $\quad S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

$\overline{AB} = \{3; -2; -4\}$ $\quad \overline{AC} = \{1; -3; -3\}$

Векторное произведение

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - j \ldots$

$= -6i + 5j - 7k = \{-6; 5; 7\}$

$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{36 + 25 + 49} = \sqrt{110}$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{110}$

2) $S_\Delta = \frac{1}{2} BD \times AC$

$$BD = \frac{S_\Delta}{\frac{1}{2} AC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{110}}{\frac{1}{2}\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{19}}$$

$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$

4. Понятие смешанного произведения

Опр:

Смешанным произведением 3-х векторов $\bar a, \bar b, \bar c$ наз. число:

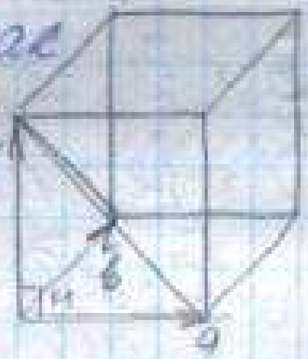
$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = (\bar a \times \bar b) \cdot \bar c$

Геометрический смысл смешанного произведения

$V_{парал} = (\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c)$

$V_{парал} = S_{осн} \cdot H = |\bar a \times \bar b|$

$|пр_{\bar a \times \bar b} \bar c| = |\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c|$ так как



$|\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c| = |(\bar a \times \bar b)\, \bar c| =$

$= |\bar a \times \bar b| \cdot |\bar c| \cos\angle = |\bar a \times \bar b| \cdot$

$\cdot |пр_{\bar a \times \bar b} \bar c|$

$V_{пир} = \frac{1}{6} V_{парал} = \frac{1}{6} |\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c|$

5. Смешанное произведение координатных форм…

Теорема!

Если вектор $\bar{a}\{x_a; y_a; z_a\}$
$\bar{b}\{x_b; y_b; z_b\}$
$\bar{c}\{x_c, y_c, z_c\}$, то…

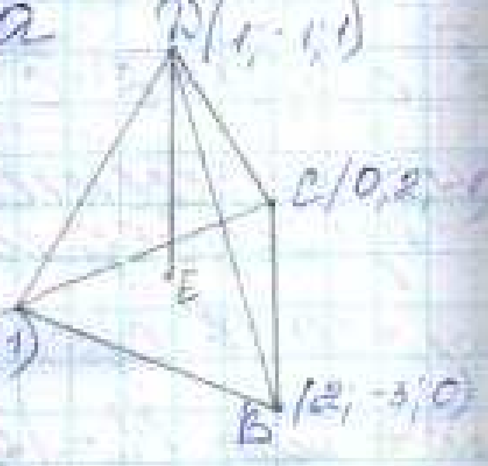
$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Задача

Найти

$V_{пир}$

DE - высота



Решение

1) $\bar{AB} = \{3; -3; -1\}$ $\quad \bar{AC} = \{1; 2; -2\}$

$\bar{AD} = \{2; -1; 0\}$

$$\bar{AB}\cdot\bar{AC}\cdot\bar{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,8+1/-…$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot 11 = \frac{11}{6}$$

2) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн}\cdot DE$ $\qquad DE = \frac{V_{пир}}{S_{осн}}$…

$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8i+5j+9k = \{8;5;9\}$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\sqrt{64+25+81} = \frac{1}{2}\sqrt{170} = \frac{\sqrt{170}}{2}$

$DE = \frac{11}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{170}} = \frac{11}{\sqrt{170}}$

6. Условие компланарности 3-х векторов

Теорема: Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарны $\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 0$

Задача:

Проверить лежат ли 4 точки в одной плоскости

$M_1(-1;2;1)$, $M_2(0;1;-3)$, $M_3(4;-2;1)$

$M_4(2;0;0)$

Решение:

Четыре точки лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ $\overline{M_4M_1}, \overline{M_4M_2}, \overline{M_4M_3}$ - компланарны

$\overline{M_4M_1}\{-3;2;1\}$ $\overline{M_4M_3}\{2;-2;1\}$

$\overline{M_4M_2}\{-2;1;-3\}$

$\overline{M_4M_1}\cdot\overline{M_4M_2}\cdot\overline{M_4M_3} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -3\cdot(-5) - 2\cdot 4 + 1\cdot 2 = 15-8+2 = 9 \neq 0$

Ответ: 4 точки не лежат в одной пл-ти