Векторная алгебра

1. Основные понятия

Вектор - направленный отрезок.

$\overline{AB}$, $\bar{a}$

Модуль вектора - длина отрезка

$|\overline{AB}|$, $|\bar{c}|$

Равные вектора - два вектора наз-ся равными если они равны по модулю и по направлению

$\bar{a} = \bar{b}$

Коллинеарные вектора - это вектора лежащие на $\parallel$ прямых либо на одной прямой $\bar{a} \parallel \bar{b}$, где если смотрят в одну сторону, то со-направлены, а если наоборот, то противоположно направлены

2. Действия с векторами

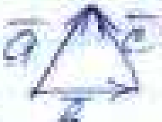
1) Сложение векторов

Правило треугольника

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$

Правило параллелограмма - соединяем начала, достраиваем до пар-ма, сумма - его диагональ

2) Вычитание



$\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$

Вектор, идущий из конца в[ычи]таемого в конец уменьшаем[о]го

3) Умножение вектора на чи

Положит-ое (+) число

$2\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$

Отрицательное (-) число - будет [смот]реть в противоположную сторо

$-0{,}5\bar{a} \uparrow\downarrow 0{,}5\bar{a}$

4) Проекция вектора на ось дру[гого] вектора

Проекция вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{b}$

$\bar{a}$ - векторная пр[оек]ция $\bar{a}$ на ось $\bar{b}$

Проекция $\bar{a}$ на $\bar{b}$ - это число, к[оторое] равно $|\bar{a}|$ если $\bar{a}$ сонаправл[ен] вектору $\bar{b}$, но если они проти[вопо]ложны, то $= -|\bar{a}|$

Утверждение:

Два вектора коллинеарны когда [с]ущ-ет (∃) число λ(ед) такое, что

3. Основная теорема векторной алгебры

а) Плоскость

Опр: Два не нулевых не коллинеарных вектора на плоскости наз-ся — базисом плоскости

Основная теорема для плоскости

Любой вектор на плоскости либо единственным образом разложен по векторам некоторого базиса плоскости, т.е.

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ — базис пл-ти

$\bar{a}$ — произв. вектор

$\exists$ — единствен. числа $x, y \in R$ — такие что

$\boxed{\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2}$

$\bar{a} = \bar{e}_1' + \bar{e}_2' = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

б) Случай в пространстве

Три вектора наз-ся компланарными если они лежат в одной пл-ти, либо в $\parallel$ плоскостях. В противном случае вектора некомпланарные

Три не нулевых не компланарных вектора в пространстве наз-ся — базисом пространства

(Т) Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базис в R^3 (пр-ва)

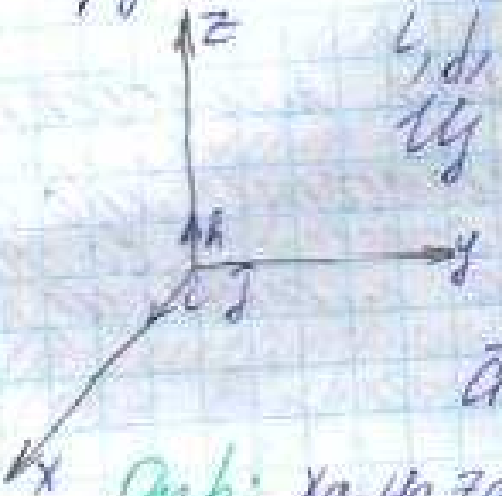
$\bar{a}$ — произв. вектор

$\exists$ — единственные числа $x, y, z \in R$:

$\boxed{\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3}$

4. Координаты вектора

Рассмотрим пространство, сис... координат



$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единич. вектора

Из основной Т следует для любого вектора $\bar{a}$ $\exists$ ед-е числа $x_a, y_a, z_a \in \mathbb{R}$, такие

$\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k}$

Опр: x_a, y_a, z_a - координаты вектора

Запись:

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$

Тогда координаты можно ... ение 2-мя способами

2-й способ: проектируем $\bar{a}$ н...

Координаты вектора - это коор... точки конца вектора, смещенного в начало координат

3-й способ:

Координаты вектора ... проекции вектора ... оси координат

1. Действие с векторами в координатной форме

$\bar{a} = \{x_a; y_a\}$ $\bar{b} = \{x_b; y_b\}$

1) $\bar{a} \pm \bar{b} = \{x_a \pm x_b; y_a \pm y_b\}$

2) $\lambda \bar{a} = \{\lambda x_a; \lambda y_a\}$

3) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$

Задача. Разложить по базису

$\bar{a} = \{2; -1\}$ $\bar{e}_1 = \{1; 3\}$ $\bar{e}_2 = \{4; -3\}$

Решение:

1) Проверить неколлинеарность векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$

$\frac{1}{4} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2$ — базис

$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

$x\bar{e}_1 = \{x; 3x\}$ $y\bar{e}_2 = \{4y; -3y\}$

$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = \{x+4y; 3x-3y\}$

$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} x+4y=2 \\ 3x-3y=-1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3-12 = -15$

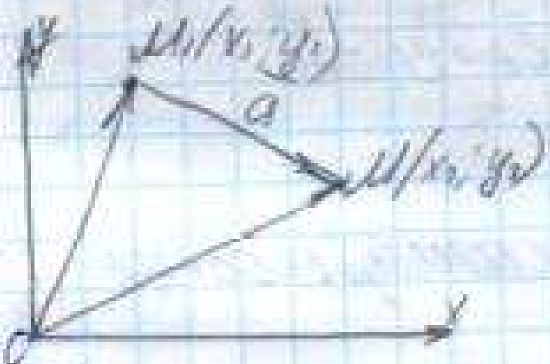
$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$

$x = \frac{-2}{-15} = \frac{2}{15}$ $\quad y = \frac{7}{15}$

$\bar{a} = \frac{2}{15}\bar{e}_1 + \frac{7}{15}\bar{e}_2$

2. Координата вектора с за- ии координатами начала конца



$\overline{OM_1} = \{x_1; y_1\}$

$\overline{OM_2} = \{x_2; y_2\}$

$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{O}$

$= \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

Для того чтобы получить дината вектора нужно динат конца вычесть коор- ота начала

3. Деление отрезка в данном о- шении

$M(x;y)$ - неизвестна

Известно, что $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$

Найдём т. $M(x;y)$

Решение:

$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$

$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x, y_2 - y\}$

$\lambda \overline{MM_2} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y)\}$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \end{cases} \quad \begin{cases} x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \\ y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2 \end{cases}$$

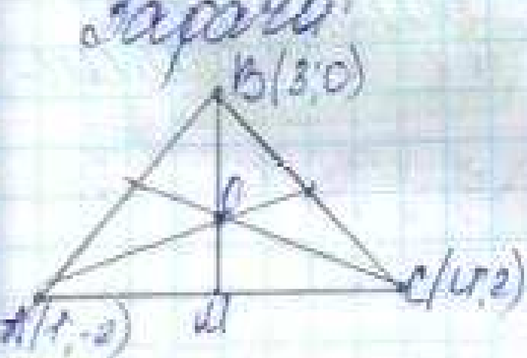
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

Частный случай

M - середина M_1M_2

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Задача



Найти пересечение медиан

1) Найдём точку M - середина AC

$x = \frac{1+4}{2}$ $\quad y = \frac{-2+2}{2}$ $\quad x = 2{,}5$ $\; y = 0$

$M(2{,}5; 0)$

2) BM $\quad B(3;0)$ $\quad M(2{,}5;0)$

$\lambda = 2$ $\quad x = (3 + 2 \cdot 2{,}5)/1+2 = 8/3 \approx 2{,}7$

$y = \frac{0+2\cdot 0}{1+2} = 0 \quad BM\left[\frac{2}{3}; 0\right]$

4. Скалярное произведение 2-х век-
ров

Опр: Скалярное произведение 2-х век-
торов $\bar a$ и $\bar b$ называется число

$\bar a \cdot \bar b = |\bar a||\bar b|\cos\varphi$

Скалярное произведение в коо-
рдинатной форме

$\bar a = \{x_a; y_a\} \quad \bar b = \{x_b; y_b\}$

св-ва скалярного произведения (св-
ва)

1) $\lambda(\bar a + \bar b) = \lambda\bar a + \lambda\bar b$
2) $(\lambda + \mu)\bar a = \lambda\bar a + \mu\bar a$
3) $\bar a + \bar b = \bar b + \bar a$
4) $(\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c)$
5) $\bar a \cdot \bar b = \bar b \cdot \bar a$
6) $\bar a \cdot (\bar b + \bar c) = \bar a \cdot \bar b + \bar a \cdot \bar c$
7) $(\lambda\bar a)\bar b = \lambda \cdot (\bar a \cdot \bar b)$

Основные св-
действий
векторы

Замечание:

Скалярное произведение удовле-
творяет те-же свойства что
произведение чисел, за исклю-