$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-8) \cdot 2 = 16$$

9) Определитель Δ матрицы ра[вен] произведению элементов гла[вной] диагонали.

Замечание:

На св-ах 8 и 9 построен мет[од] вычисления опред-ей любого п[оряд]ка — Метод Гаусса.

Суть метода Гаусса:

за счёт преобразований 8 определи[теля] матрицы сводится к определит[елю] треугольной матрицы, а далее в 9 (пример св-во) 8

Пример: исп М.Г.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 48$$

Понятие вычисления обратной матрицы

Опр:

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1} такая, что

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Замечание:

Если $A A^{-1} = E$, то $A^{-1} A = E$

Теорема:

Обратная матрица для A существует тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$) когда определитель этой матрицы $\neq 0$

Формула для выч-я A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^t$$

Пример: Вычислить A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&-4\\0&5&-2\end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix}3&-4\\5&-2\end{pmatrix} = -6+20 = 14$$

$$A_{12} = -\begin{pmatrix}-1&-4\\0&-2\end{pmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix}-1&3\\0&5\end{vmatrix} = -5$$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 4$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$|A| = 1 \cdot 14 + 2 \cdot (-2) + 0 = 14 - 4 = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -5 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 4 & -8 \\ -2 & -2 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \ldots$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Использование метода Гау… для вычисления обратно… матрицы:

Строчки менять местами мо… а столбцы нет

Можно строчки делить на чи…

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & \ldots \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/10 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{matrix}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

1. Метод Крамера

$$(*)\ \begin{cases} ax + by = f & \mid \cdot c \\ cx + dy = g & \mid \cdot a \end{cases}$$

x и y – неизв.

a, b, c, d, f, g – числа $\in R$

$bcy - ady = cf - ag \qquad bc - ad \neq 0$

$$y = \frac{cf - ag}{bc - ad} = \frac{ag - cf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x = \begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Теорема: Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ – определитель системы

$$\Delta x = \begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}$$

1) Если $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы (*)

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ - формула Крам

2) Если $\Delta = 0$, $\Delta x = 0$, то (*) имеет бесконечно много решений (в этом случае одно уравнение из другого получается умножением на одно число).

Решением явл-ся прямая, точки лежащие на прямой

3) Если $\Delta = 0$, $\Delta x \neq 0$, то система не имеет решений (несовместна)

Пример:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 12 = 13$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 5 = -13$

$x = \frac{13}{13} = 1$ $y = \frac{-13}{13} = -1$

Метод Крамера для случая трех линейных уравнений

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Теорема:

Пусть: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

1) Если определитель $\Delta \neq 0$, то сущ-ет единственное решение

$x_1 = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta z}{\Delta}$

2) Если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, причём если строки в опред-ле Δ пропорциональны, то и строки в Δx пропорциональны, тогда в этом случае имеется бесконечно много решений

3) В остальных случаях система - несовместна

Определение:

Если столбец свободных членов равен нулевому столбцу, то такая система - наз-ся однородной, в другом случае - неоднородна.

Теорема: Пусть,

Система (**) однородная

1) если $\Delta \neq 0$, то существует единственное нулевое решение

2) если $\Delta = 0$, то в этом случае сущ-ет бесконечно много решений

Метод обратной матри[цы] для решения систем ли[нейн]ых уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Систему (**) можно пере[писать] в матричной форме

$AX = B$

Пусть $|A| \neq 0 \Rightarrow$ сущ-ет A^{-1}

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad EX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ – решение систем[ы в мат]ричной форме.

Пример:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 3z = -2 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \ldots$$

$A_{11} = 6 \qquad A_{21} = 3 \qquad A_{31} = 3$

$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 2 \qquad A_{32} = 7$

$A_{13} = 2 \qquad A_{23} = -4 \qquad A_{33} = 1$

$|A| = 2 \cdot 6 + (-1)(-1) + 1 \cdot 2 = 12 + 1 + 2 = 15$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12-6+9 \\ -2-4+21 \\ 4+8+3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Ответ: $x=1 \quad y=1 \quad z=1$

Использование метода Гаусса к решению системы линейных уравнений

Преобразование Гаусса

1) Можно прибавлять к строке любую другую строку умноженную на число

2) Можно менять строчки местами (знак не меняется). Столбцы тоже можно менять, но при этом надо запоминать соответствие неизвестных столбцам

3) Можно делить строку на одно и тоже число

Пример

$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 5x+z=4 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

Цель преобразований - привести к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Замечание: столбцы можно менять только те, которые находятся левее вертикальной черты

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - y + 2x = 1 & (1) \\ y + 3x = 3 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y = 3 - 3x$

$(1) \Rightarrow z - (3 - 3x) + 2x = 1$

$z = 1 - 2x + 3 - 3x$

$z = 4 - 5x$

$$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ z = 4 - 5x \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Опр:

Неизвестные через которые выражены остальные неизвестные называются свободными, а те которые выражены через свободные неиз-ые - базисные

x - свободные неизв, $x \in \mathbb{R}$

y, z - базисные неизв