Лекция №1

Тема:

1. Матрица
2. Векторная алгебра
3. Аналитическая геометрия
4. Введение в математический анализ
5. Дифференциальное исчисление

Матричная алгебра

1. Понятие матрицы

Оп: Прямоугольная таблица чисел в которой n строк и m столбцов, вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Наз-ся матрицей в размерности $(n \times m)$

Матрицы бывают:

1) Квадратные, $n=m$
2) Прямоугольные, $n \neq m$

3) Диагональная (не диагональ[ные]
элементы = 0)

4) Треугольная (элементы стоя[щие]
под главной диагональю = 0)

5) Нулевая (все элементы рав[ны]
0)

6) Единичная (только квадратна[я]
матрица) - (на главной диаг[онали]
ли „1" ост - 0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Действия над матриц[ами]

1) Умножение матриц на чи[сло]

$\lambda \in R \quad \lambda \cdot (n \times m) = (n \times m)$

Пример: $2 \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2) Сложение, вычитание матр[иц]

$(n \times m) \pm (n \times m) = (n \times m)$

Пример:

$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 4-(-5) \\ 0-(-1) & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \\ 1 & \end{pmatrix}$

3) Транспонирование матриц[ы]

$(n \times m)^T = (m \times n)$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}^t = (2\ {-1}\ 4) \text{ – вектор строка}$$

вектор столбец

$$\underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}}^t = \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}$$

4) <u>Умножение</u> матриц

$$(n \times \underline{m}) \cdot (\underline{m} \times k) = (n \times k)$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 4\cdot(-4) & 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 + 4\cdot 5 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) & 0\cdot(-2) + (5\cdot 0) + (-2)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & 16 \\ 23 & -10 \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{(-13)}$$

$$\underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 20 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}}$$

3. Вычисление определителей квадратных матриц

1) **Определитель 2-го порядка** для матрицы 2x2 – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, наз-

число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2) Рассмотрим определитель 3-го порядка

Опр:

Минором (M_{ij}) матрицы (3x3 наз-ся число равное определителю 2-го порядка, вычисленно для матрицы, получающейся вычеркиванием i-той строки и j-того столбца из исходной матрицы

Пример:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-2)(-1) = 2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$

3) Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением (A_{ij}) для матрицы (3x3) – наз-ся число, которое находится по правилу

$A_{ij} = M_{ij}\cdot(-1)^{i+j}$ (если сумма нечетная то (-1), если четная, то (1))

Матрица знаков: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{22} = M_{22} \cdot (-1)^{2+2}$

$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 20$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$

4) Определитель 3-го порядка. Опр: для матриц (3х3) - наз-ся число

$|A| = \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Замечание:

1. Сумма стоящая в правой части равенства - наз-ся разложением определителя по 1-ой строке

2. Определитель можно раскладывать по любой строке или по любому столбцу (результат при этом не изменится)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 + 15 - 40 = -13$$

Разложим по 3-му столбцу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = -40 - 3(-9)$$

$$= -40 + 27 = -13$$

Свойства определителей

1) Правило треугольников для вычисления определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21} a_{12} a_{33})$$

2) Правило диагоналей

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

3) $|A| = |A^T|$

4) Если в опред-ле поменять местами 2 строки или 2 столбца определитель изменится на знак

5) Если в опред-ле имеются 2 одинаковые строки (столбца), то такой опред-ль равен „0"

Док-во: $|A| = -|A| \Rightarrow 0$

6) Если в определителе умножить строку (столбец) на одно и тоже число, то определитель так же умножается на это число.

$$2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

7) Если некоторая строка (столбец) представляет собой сумму 2-х строк (столбцов), то определитель равен сумме опред-ей

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8) Если к строке (столбцу) определителя прибавить любую другую строку (столбец) умноженную на любое число, то определитель не изменится

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}(-2) = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}(-3) = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & -16 & -20 \end{vmatrix}(-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(-8)\cdot 2 = 16$$

9) Определитель Δ матрицы ра[вен]
произведению элементов гла[вной]
диагонали.

Замечание:

На св-ах 8 и 9 построен мет[од]
вычисления опред-ей любого п[оряд]-
ка — Метод Гаусса.

Суть метода Гаусса:

за счет преобразований 8 определи[теля]
матрицы, сводится к определи[телю]
треугольной матрицы, а далее [по]
9 (пример св-ва) 8

Пример: исп М Г

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 48$$