4. Необходимое и достаточное условие точек перегиба.

Т.1 (необходимое условие)

Пусть $M(x_0;y_0)$ — т. перегиба графика $y=y(x)$, причем существует $y''(x)$ в некоторой окрестности x_0, непрерывна в x_0, тогда $y''(x_0)=0$.

Т.2. (достаточное условие)

Пусть существует $y''(x)$ в окр. т. $x=x_0$, причем при переходе через т. $x=x_0$ $y''(x)$ меняет знак. Тогда $M(x_0;y(x_0))$ — точка перегиба.

5. Вертикальная асимптота

Опр: Прямая $x=a$ наз-ся вертикальной асимптотой для графика $y=y(x)$, если $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)=\infty$ либо

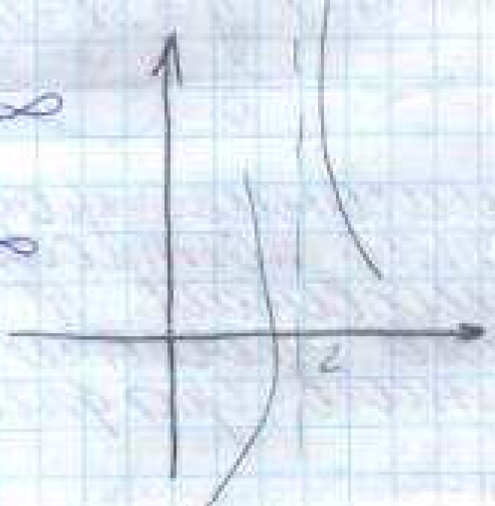
$\lim\limits_{x\to a-0} y(x)=\infty$

Примеры

1) $y=\frac{x+1}{x-2}$ $x=2$ — вертикальная асимптота

$\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{+0}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{-0}\right]=-\infty$



Пример №2

$y = \frac{x+1}{x^2}$ $\quad x=0$ верт асимптота

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x+1}{x^2} \boxed{\frac{1}{+0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x+1}{x^2} \boxed{\frac{1}{+0}} = +\infty$$

Пример №3 $\quad y = e^{\frac{1}{x-1}}$

$x=1$ - верт. асимптота $\quad \lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

6. Наклонные асимптоты

Замечание:

Горизонтальная асимптота - наклонная

Опр: Прямая $y = kx+b$ называется наклонной для графика $y=y(x)$ если при $x\to+\infty$ $x\to-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} [y(x)-(kx+b)] = 0$$

Геометрическая интерпретация

Теорема: прямая $y=kx+b$ является

наклонной асимптотой для $y=y(x)$ $\Leftrightarrow$ когда существуют 2 предела

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}[y(x)-kx]$$

Задача: Найти наклонную асимптоту при $x\to\infty$ для

$$y=\frac{x^2+1}{x-2} \quad 1)\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=\frac{1}{1}=1$$

$$2)\ b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x(x-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x}{x-2}=\frac{2}{1}=2$$

$y=x+2$

Замечание:

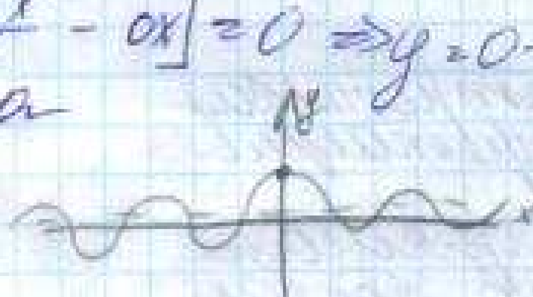
Существуют наклонные асимптоты которые график пересекает ∞ число раз

Пример $y=\frac{\sin x}{x}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sin x\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin x}{x}-0x\right]=0 \Rightarrow y=0 \text{ - прямая}$$

асимптота



7. Схема исследования функции $y=\frac{x^2+1}{x-2}$

1. Область определения

$D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

2. Чётность, нечётность

$y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-(x-2)}=\frac{x^2-1}{-x+2}$ $\quad y(x)\neq/(y(-x))$ – общего вида

3. y' – диаграмма

$$y'=\frac{2x(x-2)-x^2-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{x-2}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-2)^2}$$

$D_1=4+1=5 \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$

$+ \quad + \quad - \quad +$

$2 \quad x_1 \quad x_2$

$x=x_1$ – max

$x=x_2$ – min

4. y'' – диаграмма

$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-1)(x-2)2}{(x-2)^4}=\frac{\cancel{2x^2}-\cancel{8x}+8-\cancel{2x^2}+\cancel{8x}+2}{(x-2)^3}=\frac{10}{(x-2)^3}$$

$- \quad +$

2

5. асимптоты

$x=2$ – верт $\quad y=x+2$ – наклонная

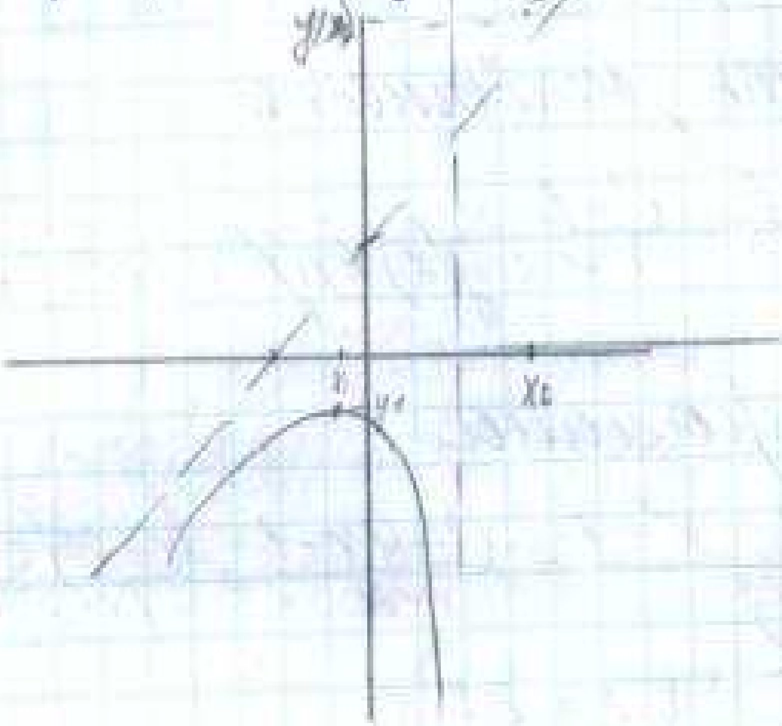
6. Точки на графике

с Ox $\quad y=0 \quad x^2+1=0$

с Oy $\quad x=0 \quad y=-0{,}5$

x	x_1	0	x_4
y	0	-0,5	?

7. График функции



8. Множество значений функции

$E(y) = (-\infty; y_1] \cup [y_2; +\infty)$