Лекция

1. Производные высокого порядка

$y(x) \to y'(x) \to y'' = (y')' \to$

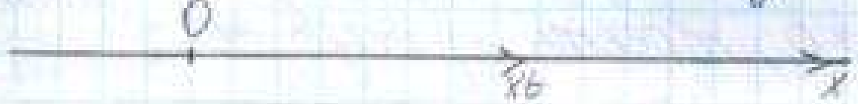
Пример: 1) $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$

$y' = 8x^3 - 6x \quad y'' = 24x^2 - 6 \quad y''' = 48x$

$y^{IV} = 48 \quad y^{V} = 0$

2) $y = e^x \quad y' = e^x \quad y'' = e^x \quad \ldots$

Механический смысл y''



$x(t)$ – закон движения материальной точки

$a_{ср} = \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ – среднее ускорение на $[t, t+\Delta t]$

$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ – ускорение в момент времени t

$a = v' = (x')' = x''(t)$

Вторая производная от закона движения есть ускорение

2. Основные теоремы дифференциального исчисления

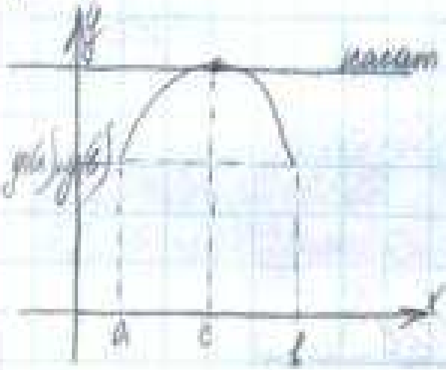
1) Теорема Ролля:

Пусть: 1) $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$

2) $y(x)$ дифференцируема на (a, b)

3) $y(a) = y(b)$

Тогда существует точка $c \in (a, b)$: $y'(c) = 0$



Геометрическая интерпретация теоремы

При выполнении условий теоремы (см. рисунок) всегда найдется точка на графике (c) в которой касательная $\parallel$ оси Ox, тогда k - углов. коэф. касат $= 0$, то есть произв $= 0$

2) Теорема Лагранжа

Пусть:

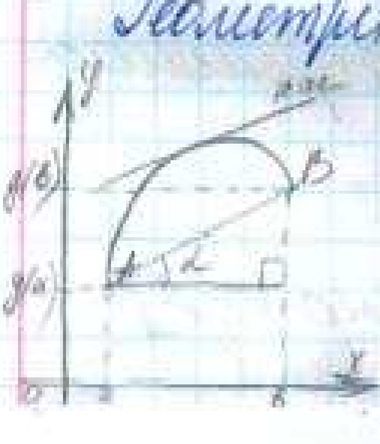
1) $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$

2) $y(x)$ диф-ма на (a, b)

Тогда существует $c \in (a, b)$:

$$\boxed{y(b) - y(a) = y'(c)(b - a)}$$

Геометрическая интерпретация теоремы



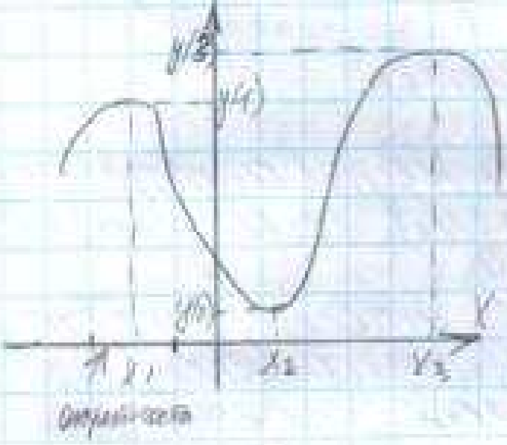
$$y'(c) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a} = tg\,\alpha$$

При выполнении условий теоремы на графике найдется такая точка, в которой касательная $\parallel$ хорде AB

3. Понятие точки экстремума

Опр: точка $x = x_0$ наз-ся т. max(min) для функции $y = y(x)$, если для $x \in$ из некоторой окрестности т. x_0 вып-ся неравенство

$$y(x_0) > y(x) \quad (y(x_0) < y(x))$$



$x_1; x_3$ - точки max

x_2 - точка min

y_1, y_3 - max

y_2 - min

Опр: Точки max и min наз-ся точками экстремума

Опр: Значения функции в точках max и min наз-ся максимумами и минимумами

Опр: Максимумы и минимумы наз-ся экстремумами

4. Понятие критических и стационарных точек

Опр: точка $x_0 \in D(y)$ наз-ся критической для функции $y = y(x)$, если $y'(x_0)$ не существует, либо $y'(x_0) = 0$

Пример:

1) $y=x^3$ $y'=3x^2$ y' существует везде

$y'=0$ при $x=0$ $x=0$ крит. точка

2) $y=\sqrt[3]{x^2}$ $D(y)=R$

$y'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

y' - не существует при $x=0 \in D(y)$

$y'\neq 0$ x_0 - крит. точка

Опр: точка $x_0 \in D(y)$ называется стационарной для $y=y(x)$, если $y'(x_0)=0$

Утверждение: любая стационарная точка является критической, но не всякая критическая точка является стационарной

$x=0$ из примера 1 явл. стационарной, но $x=0$ из 2 не явл. стационарной

5. Необходимые и достаточные условие монотонности функции.

Теорема: Если $y(x)$ - возрастающая (убывающая) на интервале (a, b) и дифференцируемая функция для $x \in (a,b)$ $y'(x)\geq 0$ - возр. ($y'(x)\leq 0$) убыв.

Теорема: (достаточное условие)

Пусть $y'(x)>0$ или $y'(x)<0$ для $x\in(a,b)$

тогда $y(x)$ - возр (убыв) на (a,b)

Пример: $y=x^3-3x+1$

Исследовать на монотонность

Решение: $y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

6. Необходимое и достаточное условие точки экстремума.

Теорема: (необходимое условие)

Если $x=x_0$ – т. экстремума для $y=y(x)$ то $x=x_0$ – крит. точка для $y=y(x)$

Замечание: Из теоремы следует, что точки экстремума следует искать среди критических точек

Замечание: Не всякая крит точка является точкой экстремума

Например: $y=x^3$ $y'=3x^2$ $y'=0$ при $x=0$ – крит. точка, которая не явл точкой экстремума

Теорема: (достаточное условие)

Пусть $x=x_0$ – критическая для $y=y(x)$ причем $y'(x)$ меняет знак при переходе через т. $x=x_0$

а) с плюса на минус точка т-max

б) с минуса на плюс, точка-min

Пример: Исследовать на экстремум

$y = (2x-1)e^{-x}$

Решение:

1) $D(y) = R$

2) Поиск крит. точек

$y' = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2-2x+1) = e^{-x}(3-2x)$

$y' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$

y' – существует везде $x = \frac{3}{2}$ крит. точ.

3) Исследовать крит. точки на экстремум

$x_{max} = \frac{3}{2}$

$y_{max} = 2e^{-\frac{3}{2}}$

Ответ: $x_{max} = 1{,}5$ $y_{max} = 2\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$

Пример №2:

$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1$

Исслед. на экстр

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

$\frac{x}{x-1} > 0$

2) Поиск крит. точек

$y' = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1(x-1) - 1x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)}$

$y' \neq 0$ y' не сущ. при $x_1 = 0 \notin D \Rightarrow$
$x_2 = 1 \notin D$

$\Rightarrow$ критических точек нет $\Rightarrow$ т. экстр нет

Ответ: т. экстр. нет

7. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Теорема: Пусть $y(x)$ - непрерывна на отрезке $[a, b]$

$x_1, x_2, \ldots$ крит. точки функции на (a, b)

$y_{наиб} = \max \left\{ \begin{matrix} y(a), y(b) \\ y(x_1), y(x_2) \end{matrix} \ldots \right\}$ $y_{наим} = \min \left\{ \begin{matrix} y(a), y(b) \\ y(x_1), y(x_2) \end{matrix} \right\}$

Пример: задача РГР №5

$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ на $[0; 4]$

1) $D(y) = \mathbb{R} \Rightarrow [0; 4] \subset D(y) \Rightarrow y(x)$ непрерывна $[0; 4]$

2) Поиск крит. точек на $(0; 4)$

$y' = \left(\left(2(x-1)^2(x-4)\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 2(x-1)^2(x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot$

$\cdot \left(2(x-1)^2(x-4)\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x-4)^2}} \cdot 2\left(((x-1)^2)'(x-4) + \right.$

$\left. + (x-1)^2 \cdot (x-4)'\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^3 \cdot 4(x-1)(x-4)^2}} \cdot \left(2(x-1)(x-4) + (x-1)^2\right) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(2x-8+x-1)}{\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}} = \frac{2(3x-9)}{3\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}} = \frac{2(x-3)}{\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}}$

$y' = 0$ при $x = 3 \in (0; 4)$

y' не существует при $x = 1 \in (0; 4)$ и y не существует $y = 4 \notin (0; 4)$

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$ - критические точки и интер вала $[0;4)$

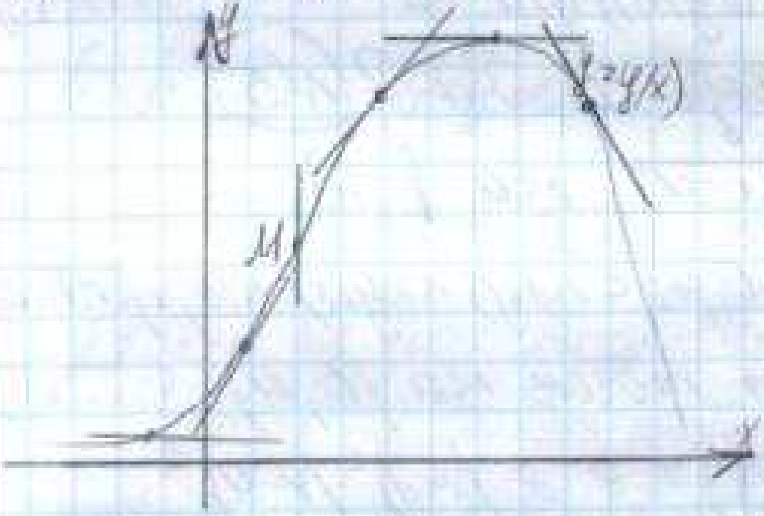
3) $y(0) = \sqrt[3]{-8} = -2$ $y(4) = 0$ $y(1) = 0$

$y(3) = \sqrt[3]{-8} = -2$

Ответ: $y_{наиб} = 0 = y(1) = y(4)$

$y_{наим} = -2 = y(0) = y(3)$

20.12.12 2. Выпуклость и вогнутость графика функции



Опр: График функции называется выпуклым (вверх) на участке $(A;B)$, если касательная, проведенная в любой точке этого участка, лежит выше графика в некоторой малой окрестности точки касания.

Опр: График функции называется вогнутым (вып. вниз) на участке AB если касательная проведенная в любой точке этого участка, лежит ниже графика в некоторой малой окрестности точки касания.

Точка на графике, отделяющая участки выпуклости и вогнутости графика наз. точкой перегиба

Одна часть касат-ой проведённой в точке перегиба лежит выше графика, а другая ниже

3. Необходимое и достаточное условие выпуклости графика

Т.1. Необходимое условие

Пусть график функции $y=y(x)$ выпуклый (вогнутый) на участке с соответствующим интервалом (a,b) и существует 2-ая производная $y''(x)$ на $(a;b)$ тогда $y''(x)\le 0$ ($y''\ge 0$) для $(a;b)$

Т.2. Достаточное условие

Пусть $y''(x)>0$ ($y''(x)<0$) на (a,b). Тогда график функции $y(x)$ вогнутый (выпуклый) на участке соотв. (a,b)

Задача: исследовать выпуклость графика функции

$y=x^3-3x+1$ $y'=3x^2-3$ $y''=6x$

$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad y''$

Замечание: график функции можно построить при помощи исследования y', но исследов-е y'' может прояснить уточнение характера графика