$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Лекция

1. Правило дифференцирования сложной функции.

$y = y(u(x))$ - сложн функция

$y(u)$ - внешняя функция

$u(x)$ - внутренняя функция

Пример: $y = e^{2x}$

$y = e^u$ - внешняя $u = 2x$ - внутренняя

Теорема:

Если $y = y(u(x))$ - сложн. ф-я, то

$y' = y'(u)\big|_{u=u(x)} \cdot u'(x)$

Комментарий: вертикальная черта означает подстановку вместо u выражения $u(x)$ $\big|_{u=u(x)}$

Примеры:

1) $y = e^{2x}$ $\quad y = e^u,\ u = 2x \ \| \to y'(e^u)\big|_{u=2x} \cdot (2x)' =$

$= e^u\big|_{u=2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

2) $\cos(\sqrt{x}) = y$

$$\left.\begin{array}{l} y = \cos(u) \\ u = \sqrt{x} \end{array}\right| \Rightarrow y' = (\cos u)'\Big|_{u=\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) $y = \ln^5 x$

Замечание: внешняя функция всегда определяется последним действием

$$\left.\begin{array}{l} y = u^5 \\ u = \ln x \end{array}\right\| \Rightarrow y' = (u^5)'\Big|_{u=\ln x} \cdot (\ln(x))' = 5u^4\Big|_{u=\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 5\ln^4 x \cdot \frac{1}{x}$$

„Народный" способ диф-я сложн. ф-ии

$$y = \sqrt{tg^3\sqrt{\sin(x^5)}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{tg^3\sqrt{\sin(x^5)}}} \cdot 3\,tg^2\sqrt{\sin(x^5)} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{\sin(x^5)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^5)}} \cdot$$

$$\cdot \cos(x^5) \cdot 5x^4$$

Ключ к успеху - последняя операция

Пример:

$$y = e^{\sqrt{\cos x}} \cdot tg^3 x$$

$$y' = \left(e^{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x)\right) \cdot tg^3 x + 3tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\sqrt{\cos x}}$$

2. Правило логарифмического дифф-я

$$(u)' = u \cdot (\ln(u))'$$

Случай №1:

$$\left((\cos x)^{\sqrt{\sin x}}\right)' = (\cos x)^{\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\ln\left((\cos x)^{\sqrt{\sin x}}\right)\right)' = (\cos x)^{\sqrt{\sin x}} \cdot$$

$$\cdot \left(\sqrt{\sin x} \cdot \ln(\cos x)\right)' = \cos x^{\sqrt{\sin x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot \ln \cos x +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}\right)$$

2. Понятие дифференциала

Пусть $y(x)$ диф в т. $x \Rightarrow y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(\Delta x) = y'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – б.м.ф $(\Delta x \to 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta x\, \alpha(\Delta x) = y'(x)\Delta x - \Delta y$

$\Delta y = y'\Delta x + \Delta x\, \alpha_1(\Delta x)$, где $\alpha_1(\Delta x) = -\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф $(\Delta x \to 0)$

$y' \cdot \Delta x \gg \Delta x\, \alpha_1(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, \alpha_1(\Delta x)}{y'\Delta x} = 0$$

Показано, что приращение функции состоит из двух слагаемых и причем 1-ое слагаемое $\gg$ 2-го

Опр: Дифференциалом функции $y(x)$ называется величина dy и

$dy = y'(x)\,\Delta x$ которая является главной линейной частью приращения функции

Геометрический смысл дифференциала

α - угол наклона касательной

Из геометрического смысла производной по предыдущему следует что:

$y'(x_0) = tg\alpha$

Из $\Delta M_0AB \Rightarrow AB = M_0B \cdot tg(\alpha) = \Delta x y'(x_0) = dy(x_0)$

$AB = dy(x_0)$ $dy = AB$

Отсюда следует приближенное равенство $\Delta y \approx dy$

3. Приближенные вычисления при помощи дифференциала

$\Delta y \approx dy$

$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx y'(x_0)\Delta x$

$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$

$x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x - x_0$

$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$ (*)

Вычислить $(1,998)^5$ на калькул. $= 31,8403$

Решение:

1) Определить функцию значение кото-

рой надо вычислить приближенно

$y = x^5 \quad x = 1{,}998$

2) Найти близлежащий аргумент x для которого значение ф-ии вычисляется легко

$x_0 = 2 \quad y(x_0) = 2^5 = 32$

3) Найти значение значение производной в x_0

$y' = 5x^4 \quad y'(x_0) = 5 \cdot 2^4 = 80$

4) Вычисляем приближенное значение по формуле (*)

$(1{,}998)^5 \approx y(x) \approx 32 + 80(1{,}998 - 2) = 32 + 80 \cdot (-0{,}002)$

$= 32 - 0{,}16 = 31{,}84$

4. Правило Лопиталя.

Теорема:

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.ф. $(x \to a)$, причём $\alpha(a) = \beta(a) = 0$

Пусть $\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ – непрерывная ф-я в т. $x = a$,

тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$

Комментарий:

Условие теоремы $\alpha(a) = \beta(a) = 0$ и $\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ –

непрерывна в т. $x=a$ - обычно всегда выполняется, проверять не надо

Доказательство:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} =$

$= \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$

2) $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ - непрерывна в т. $x=a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$

3) Из „1" и „2" следует, что $\Rightarrow$ левая и правая часть совпадают.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{5x^2+6x-11} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)'}{(5x^2+6x-11)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1}{10x+6} = \frac{3}{16}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{-2x} = \frac{3}{4}\Big/-2 = -\frac{3}{8}$

3) Правило Лопиталя может быть использовано в одной задаче несколько раз.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

Используется также для неопределенностей $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$