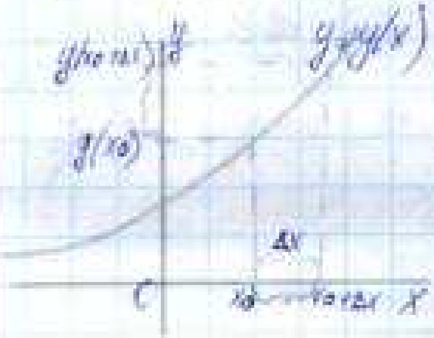
Дифференциальное исчисление

1. Понятие производной функции в точке.

Опр: Производная функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ называется число

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$$



$\Delta y = y(x_0+\Delta x)-y(x_0)$ – приращение функции

Δx – приращение аргумента

$\Delta x\to 0 \quad \Delta y\to 0$

Опр: функция называется дифференцируемой в точке x_0 если существует производная функции в этой точке

Пример: $y=2x^2-x+1$

Найти производную в точке x

$y(x)=2x^2-x+1$

$y(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)+1=2x^2+4x\Delta x+2\Delta x^2-x-\Delta x+1=2\Delta x^2+(4x-1)\Delta x+2x^2-x+1$

$\Delta y=2\Delta x^2+(4x-1)\Delta x+\cancel{2x^2-x+1}-\cancel{(2x^2-x+1)}=$
$=2\Delta x^2+(4x-1)\Delta x$

$y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x^2+\Delta x(4x-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+4x-1}{1}=4x-1$

Теорема:

Если ф-я дифференцируема в точке $x=x_0$, то ф-ия непрерывна в точке

Док-во:

y - диф-ма в т. $x=x_0 \Rightarrow y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'(x_0)=\alpha(\Delta x)$ - б.м.ф. $(\Delta x\to 0)$, т.к.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'(x_0)\right]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'(x_0)=$

$=y'(x_0)-y'(x_0)=0$

$\Delta y=y'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim(y'(x_0)\Delta x+$

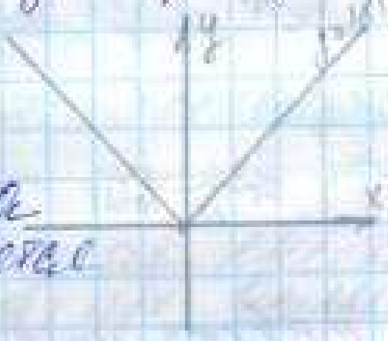
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x)=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[y(x_0+\Delta x)-y(x_0)]=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}y(x_0+\Delta x)=y(x_0)$

$x=x_0+\Delta x$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$

Замечание: обратное утверждение не верно



Пример: $y=|x|$

Эта функция непрерывна в точке $x=x_0$, но не является дифференцируемой

$\Delta y=y(0+\Delta x)-0=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x>0\\ -\Delta x & \Delta x<0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ предела не существует)

2. Механический смысл производной.

$x = x(t)$ - закон прямолинейного неравномерного движения мат. точки

$[t; t+\Delta t]$

Средняя скорость за Δt вычисляется по формуле

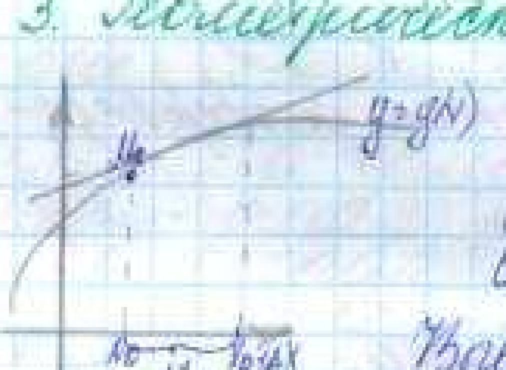
$$v_{ср} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

При $\Delta t \to 0$ $v_{ср} \to v(t)$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$ - мгновенная скорость

$$v(t) = x'(t)$$

3. Геометрический смысл производной



Опр: касательной наз-ся прямая являющаяся предельным положением секущей

Выведем уравнение касательной

Вывод: $y = k(x) + b$ - уравнение касат-ой с неопределенными коэффициентами k и b

$k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}$ (след. из опред. кас-ой)

$k_{сек} = tg\,\alpha_{сек} = \frac{M'M}{M_0M'} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$

Вывод: угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке

$y = y'(x_0)x + b$ $(x_0; y(x_0))$ – точка лежащая на касательной

$y(x_0) = y'(x_0)x_0 + b$

$b = y(x_0) - y'(x_0)x_0$

Уравнение касательной

$y = y'(x_0)x + y(x_0) - y'(x_0)x_0$

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

Вывод уравнения нормали

Опр: нормалью наз-ся прямая, проходящая через точку касания ⊥ касательной

Случай 1. $y'(x_0) = 0 \Rightarrow$ ур-е касат.

$y = y(x_0)$ – горизонтальная прямая

нормаль: $x = x_0$

Случай 2: $y'(x_0) \neq 0$

Ур-е касат-ой $y = k_{кас} x + b$
Ур-е нормали $y = k_{норм} x + b_2$

Условие $\perp$ двух прямых (касат и нормали)

$k_{кас} \cdot k_{норм} = -1$

$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{y'(x_0)}$

Напоминание: уравнение прямой с угловым коэффициентом k проходящей через точку $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

$(x_0; y_0) = (x_0; y(x_0))$ - т. касания

$$\boxed{y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)}$$

Задача:

Найти уравнение касательной и нормали

$y = \frac{x^2+1}{x-3}$ в т. $x_0 = 4$

$y(x_0) = \frac{4^2+1}{4-3} = 17$

$y'(x) = \frac{(x^2+1)'(x-3) - (x^2+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3) - (x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$

$y'(x_0) = \frac{4^2-6\cdot 4-1}{(4-3)^2} = -9$

Ур-е касательной:

$y = -9(x-4)+17$ $\quad y = -9x+53$

Ур-е нормали

$y = \frac{1}{9}(x-4)+17$

$y = \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}+17$ $\quad y = \frac{1}{9}x+16\frac{5}{9}$

4. Правила дифференцирования.

а) $(cu)' = c(u)'$

б) $(u \pm v)' = u'+v'$

в) $(u \cdot v)' = u'v+v'u$

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

д) Правило логарифмического дифференцирования

$(u') = u(\ln u)'$

Док-во (в)

$y = uv$

$\Delta y = u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x) - u(x_0)v(x_0)$

$\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0)$

$\Delta v = v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$

$u(x_0+\Delta x) = u+\Delta u$

$v(x_0+\Delta x) = v+\Delta v$

$\Delta y = (v+\Delta v)(u+\Delta u) - uv = uv + v\cdot\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} v\underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} - u\underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} + \Delta v\underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{0}$$

5. Таблица производных элементарных функций.

1) $(C)' = 0$
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2) $(x)' = 1$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $(x^p)' = px^{p-1}$
7) $(a^x)' = a^x \ln a$
6) $(e^x)' = e^x$
8) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
9) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
11) $(\cos x)' = -\sin x$
10) $(\sin x)' = \cos x$
12) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
13) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Док-во 3: $y = \sqrt{x}$

$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Лекция

1. Правило дифференцирования сложной функции.

$y = y(u(x))$ - сложн функция

$y(u)$ - внешняя функция

$u(x)$ - внутренняя функция

Пример: $y = e^{2x}$

$y = e^u$ - внешняя $u = 2x$ - внутренняя

Теорема:

Если $y = y(u(x))$ - сложн фун-я, то

$y' = y'(u)\big|_{u=u(x)} \, u'(x)$ ~~$u = u(x)$~~

Комментарий: вертикальная черта означает подстановку вместо u выражения $u(x)$ $\big|_{u=u(x)}$

Примеры:

1) $y = e^{2x}$ $\quad \begin{matrix} y = e^u \\ u = 2x \end{matrix} \Big\| \to y'(e^u)'\big|_{u=2x} \cdot (2x)' =$

$= e^u\big|_{u=2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$