Таблица эквивалентности функций

$\alpha(x)$ - б.м.ф. $(x \to a)$

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
2) $tg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
4) $arctg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$ $(x \to a)$
6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$ $(x \to a)$
8) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$
9) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$ $(x \to a)$
10) $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha$ $(x \to a)$

22.11.12.

1. Свойства пределов

Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A < \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = B <$

Тогда:

1) $\lim_{x\to a} c f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
2) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim g(x)$
3) $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim_{x\to a} f(x)}$, если $B \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^{\lim g(x)}$, если $A>0$

Пример:

$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x+1) = \lim\limits_{x\to 1}2x^2 - \lim\limits_{x\to 1}x + \lim\limits_{x\to 1}1 =$

$= 2\lim\limits_{x\to 1}x^2 - \lim\limits_{x\to 1}x + \lim\limits_{x\to 1}1 = 2\cdot 1-1+1=2$

2. Использование эквивалентных функций при вычислении пределов

Теорема: если $\alpha \sim \alpha_1\ (x\to a)$, $\beta\sim\beta_1\ (x\to a)$, то

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ (если существует этот предел)

Док-во: $\alpha\sim\alpha_1,\ (x\to a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha_1}=1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}-1\right)=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_1}-1=\rho(x)$ - б.м.ф. $(x\to a)$

$\Rightarrow \alpha=\alpha_1(1+\rho(x))$

Аналогично, $\beta=\beta_1(1+\rho_1(x))$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim \alpha_1(1+\rho(x))}{\lim \beta_1(1+\rho_1(x))} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to a}\frac{1+\rho(x)}{1+\rho_1(x)}}_{=1} =$

$= \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Пример:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\arcsin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}\cdot 2x}{3x} = \frac{2}{15}$

a) $\sqrt[5]{1+2x}-1 = (1+2x)^{\frac{1}{5}}-1 \sim \frac{1}{5}\cdot 2x$

$p=\frac{1}{5}$ $\alpha(x)=2x$ - бмф $x\to0$

б) $\arcsin 3x \sim 3x$ $\alpha(x)=3x$

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(e^{x^2}-1)}{1-\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\frac{9x^2}{2}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{9x^2}{2}}=\frac{2}{9}$

3. Теорема произведения бмф на ограниченную

Опр: функция $U(x)$ называется ограниченной при $x\to a$, если $|U(x)|\le M$ в некоторой выколотой окрестности точки $x=a$

$(c;d)$ - окрестность a

$(c,d)\setminus\{x=a\}$ - выколотая окрестность

Примеры:

1) $\cos 1/x$ - огран $(x\to0)$, т.к. $|\cos 1/x|\le1$ при $x\ne0$

2) $\operatorname{arctg} x$ - огран. $(x\to+\infty)$, т.к $|\operatorname{arctg} x|<\frac{\pi}{2}$

3) Утв. сущ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $f(x)$ - огран $(x\to a)$

Теорема: (без доказательства)

Если $\alpha(x)$ - бмф $(x\to a)$

$u(x)$ - огр $(x\to a)$, то $\lim\limits_{x\to a}[\alpha(x)u(x)]=0$

Примеры: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}(x^2\cdot\cos x)$

$\frac{1}{x}$ - б.м.ф. $(x\to\infty)$

$\cos x$ - огр.ф. $(x\to\infty)$, т.к. $|\cos x|\le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \cos x = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x}\cdot e^{x}$ $\quad$ e^{x} - б.м.ф. $(x\to 0)$

e^{x} - огран. $(x\to 0)$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} e^{x} = e^{0} = 1 < \infty$

4. Свойства эквивалентных функций

Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ $(x\to a)$

$\beta(x) \sim \beta_1(x)$ $(x\to a)$

$u(x)$ - огран. $(x\to a)$

1) $\alpha(x)\cdot u(x) \sim \alpha_1(x)\cdot u(x)$ $\quad x\to a$

$c\alpha(x) \sim c\alpha_1(x)$ $\quad x\to a$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 5x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$1-\cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$

$x\cdot\sin x \sim x\cdot 5x = 5x^2$

$u(x) = x$ - огран. $(x\to 0)$

$\alpha(x) = \sin 5x$ - б.м.ф. $(x\to 0)$

$\sin 5x \sim 5x$

2) $\alpha(x)\beta(x) \sim \alpha_1(x)\beta_1(x)$ $(x\to a)$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{arctg} 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{x^2} = 6$

$\sin 2x \cdot \operatorname{arctg} 3x \sim 2x \cdot 3x = 6x^2$

3) $\alpha(x) - \beta(x) \sim \alpha_1(x) - \beta_1(x)$ $(x \to a)$, если существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \neq 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x - (1 - \cos x)}{x^2} =$$

$$\underbrace{(1 - \cos 2x)}_{=\alpha(x)} - \underbrace{(1 - \cos x)}_{=\beta(x)}$$

$$1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2 \quad (x \to 0)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$$

$\Rightarrow 1 - \cos 2x \not\sim 1 - \cos x$ — условия выполнены

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = 1{,}5$$

5. Предел степени

Теорема: $\lim\limits_{x \to a} u^v = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to a} (u-1)v}$

Док-во:

$$\lim_{x \to a} u^v = \lim_{x \to a} e^{\ln u^v} = e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln u}{1/v}} \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(1+u-1)}{1/v}} = e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{u-1}{1/v}} = e^{\lim\limits_{x \to a} (u-1)v}$$

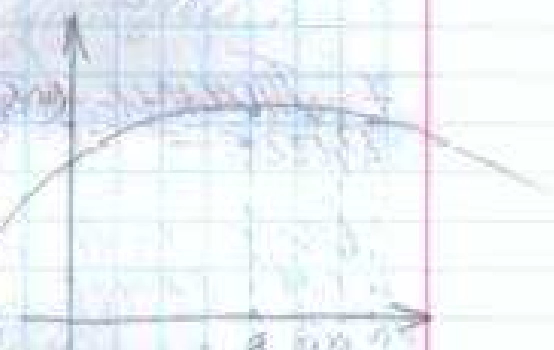
$\ln(1 + u - 1) \sim u - 1$ $\quad \alpha = u - 1$ — б.м.ф. $(x \to a)$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)2x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}} = e^6$$

6. Односторонние пределы

Опр: Число A наз-ся правосторонним (левосторонним) пределом $f(x)$ в т. $x=a$ если для любой посл. $\{x_n>a\}$ ($\{x_n<a\}$) : $\lim_{n\to\infty} x_n = a$



$\lim_{x\to a} f(x) = A$

Обознач: прав $\lim_{x\to a+} f(x) = A$

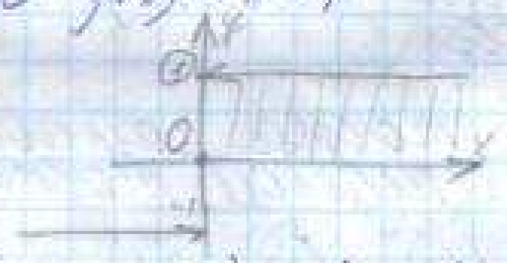
лев $\lim_{x\to a-} f(x) = A$

Утв: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ существует $\Leftrightarrow$ сущ-ет

$\lim_{x\to a+} f(x) = A$, $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$

Пример: $x>0$ $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \Rightarrow 1 \neq -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ — не сущ-ет

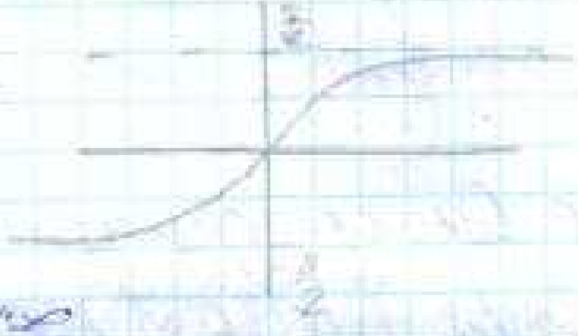
Замечание:

Обычно односторонние пределы находят при помощи графиков.

Пример:

$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$



Если $x \to 0+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

7. Точки разрыва и их классификации

Опр: $x=a$ наз-ся точкой разрыва ф-ии $f(x)$, если

1) $f(x)$ опред. в выколотой окрестности x

2) $f(x)$ - не явл. непрерывн. функцией в $x=a$, т.е. не вып. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Дадим классификацию точек разрыва

1) Опр: точка разрыва $x=a$ наз-ся устранимой точкой разрыва, если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

Пример: $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $x=0$ - т. разрыва

$\lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

2) Опр: т. разрыва $x=a$ называется т. разрыва I рода (скачок) если

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ сущ-ет

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

Пример:

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ т. разрыва I рода

3) Опр: т. разрыва $x = a$ наз-ся т. разрыва II рода если хоть бы один из односторонних пределов $= \infty$