15.11.12. 1. Предел последовательности.

Числовой последовательностью называется бесконечный набор чисел таких, что каждому числу приписывается свой порядковый номер

Обознач: $a_1, a_2, a_3 \dots$

Пример: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

2) $\{a_n = \frac{1}{n}\}$ $a_5 = \frac{1}{5}$

Некоторые последовательности имеют точки сгущения, эта точка сгущения называется пределом последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Пр: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Замечание: в качестве предела последовательности могут выступать $+\infty$; $-\infty$, ∞

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $a_1\ a_2\ a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

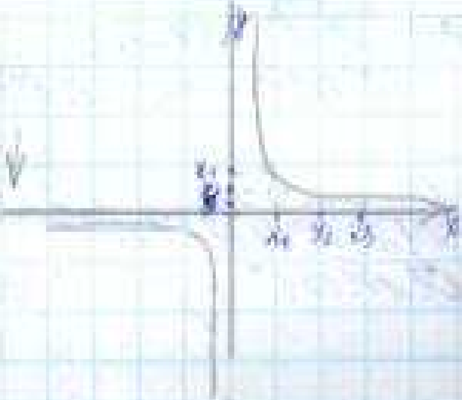
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $a_n\ a_2\ a_1$ $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (это значит либо $+\infty$, либо $-\infty$; либо $a_3\ a_1\ a_2\ a_4$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$

2. Предел функции в точке

$y = \frac{1}{x}$ - гипербола $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$



Опр: число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ если для любой последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ сущ-ет $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Обознач: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Пример:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

3. Предел непрерывной функции

Опр: Ф-ия $y=f(x)$ наз-ся непрерывна в точке $x=x_0$ если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Утверждение: любая элементарная функция непрерывна в любой точке из области своего определения

Следствие: если $x_0 \in D$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Пример: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x+1}{4x^2+2} = \frac{1}{3}$

4. Типы неопределенностей при вычислении предела

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ $\quad D\{x \neq \pm 1\}$ $\quad x=1 \notin D$ $\quad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$

Числитель стремится к 0, поэтому дробь → 0, но знам. тоже → 0, поэтому дробь → ∞

Эта ситуация неопределенности наз-ся – неопределенностью при вычислении пределов

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1}=\infty \quad \lim\limits_{x\to1}x+1=2 \quad \lim\limits_{x\to1}x^2-1=0$

В этом примере неопределенность отсутствует

$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ \left[0\cdot\infty;\ \infty-\infty\right];\ \left[\frac{0}{1/\infty}\right];\ \left[\frac{0}{0}\right];\ \left[1^{\infty}\right]$

5. Метод сокращения

Утв: Если $f(x)=g(x)$ при $x\neq x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{-1-x}=\frac{3}{-2}=-1{,}5$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6x-3}-\sqrt{2x+5}}{4-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{6x-3}-\sqrt{2x+5})(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{6x-3-(2x+5)}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=\lim_{x\to2}\frac{4x-8}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-4}{(2+x)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{6x-3})}=\frac{-4}{4\cdot6}=-\frac{1}{6}$$

6. Предела при $x \to \infty$

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}} = \infty$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}-2x}{3x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-4}-2}{3+\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2-4)}-2}{3+1/x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-4/x^2}-2}{3+1/x} = \frac{-3}{3} = -1$

7. Использование эквивалентных функций

Опр: функция $\alpha(x)$ наз-ся бесконечно малой функцией при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Пример:

1) $\alpha(x) = x^2$ б.м.ф. $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

2) $\alpha(x) = \sin x$ б.м.ф. $x \to 0$ т.к. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

3) $\alpha(x) = x-1$ б.м.ф. $x \to 1$ т.к. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$

Опр: две б.м.ф. $(x\to a)$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз-ся эквивалентными при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$