

Математический анализ

1. Понятие числовой функции и способ ее задания:

Опр: числовой функцией с областью определения $D \subseteq \mathbb{R}$ называется правило, которому каждому элементу $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in \mathbb{R}$ при этом x — аргумент y — значение функции $y = f(x)$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Способы задания функции:

1) Аналитический способ / в виде формулы

В этом случае функция задается аналитической формулой $y = f(x)$ D — область определения. Это единственное значение y для каждого x — аргумента, искомое y формулы

Пример:

а) $y = x^2$ D — все действительные числа и оно совпадает с $(-\infty; +\infty) \rightarrow D = (-\infty; +\infty)$

б) $y = x^2$ $D(0; +\infty)$

в) $y = \frac{1}{x-1}$ $D \mathbb{R}, x-1 \neq 0 \quad x \neq 1$
 $D(1; +\infty)$

2) Графический способ

Опр: Графиком функции $f(x)$ называется кривая на плоскости. Огу уравнение

мне которой имеет вид $y = f(x)$

а) $y = x^2$



Кривая не является графом непрерывной функции. Если x_1 и x_2 — значения x , соответствующие y_1 и y_2 , то противоречит определению функции.

Внимание: График непрерывной функции пересекает ось ординат только в одной точке.

3) Табличный способ

x_1	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3

- в научно-экспериментальных исследованиях

Измерение зависимости температуры воздуха в помещении от температуры на улице.

4) Качественный способ задания функции

Состоит в том, что значения функции соответствуют в результате решения уравнения $P(x, y) = 0$.

$P(x, y) = 0$ Пример: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

2. Свойства функции

а) Четность, нечетность

Опр: $y = f(x)$ - называется четной, если для любого x из области определения $x \in D$ и $f(-x) = f(x)$

$$y = f(x) \quad \forall x \in D \quad -x \in D \text{ и } f(-x) = f(x)$$

Замечание: график четной функции симметричен оси Oy

Примера:

$$1) y = x^2 \quad y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$$

$$2) y = \cos x + 2 \quad y(-x) = \cos(-x) + 2 = \cos x + 2 = y(x)$$

Опр: $y = f(x)$ называется нечетной функцией на D если $\forall x \in D$
 $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$

Замечание: график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примера:

$$1) y = x - 3x^3$$

$$y(-x) = -x - 3(-x)^3 = -x + 3x^3 = -(x - 3x^3) = -y(x)$$

$$2) y = \sin x + \sin 3x$$

$$y(-x) = \sin(-x) + \sin(-3x) = -\sin x - \sin 3x = -(\sin x + \sin 3x) = -y(x)$$

3) Монотонность функции

Опр: $y = f(x)$ называется возрастающей/убывающей функцией на интервале (a, b) если:

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ выполняется неравенство:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad - \text{возр}$$

$$f(x_1) > f(x_2) \quad - \text{убывающ}$$

Если функция или бор или убывает на некотором интервале, то такая функция называется монотонной на этом интервале.

б) Периодичность функции

Опр: $y = f(x)$ называется периодической в отношении $T > 0$ если для любого $x \in D$

$$x+T \in D \text{ и } f(x+T) = f(x)$$

Пример:

1) $y = \cos x + 3 \sin x \quad T = 2\pi$

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + 3 \sin(x+2\pi) = \cos x + 3 \sin x$$

в) Множество значений функции

Опр: множество всех значений функции называется множеством значений функции и обозначается E_f

Множество значений E на графике функции

E - это проекция графика на ось Oy

Пример: $y = e^x \quad E = (0; +\infty)$



3. Действия с элементарными функциями.

Элементарные операции можно свести к четырем: сложить, вычитать, умножить, делить элементарные функции. Элементарными функциями являются функции

$f = f(x)$, $\lambda = g(y)$, $f = f(g(x))$ - основные 2-х видов функции.