ЗАДАЧИ

ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Упражнения

Определения и примеры

1. Пусть G_n — простой граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты. Изобразить графы G_4 и G_6 и найти их матрицы смежности. Показать, что если $m < n$, то $G_m \subset G_n$.
2. Для графов из каждой пары графов, изображенных на рис. 33, выяснить, изоморфны ли они.

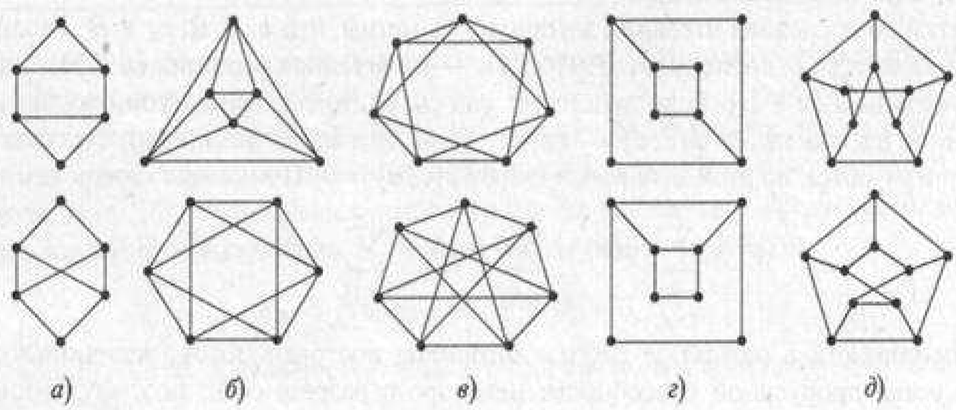

Рис. 33

3. Найти все (с точностью до изоморфизма) простые графы, в которых не более пяти вершин.
4. Сколько существует попарно неизоморфных простых графов с 10 вершинами и 1) 44; 2) 43 ребрами?
5. Сколько существует помеченных простых графов с n вершинами? Сколько из них имеет m ребер?
6. Доказать, что в простом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины одинаковой степени.
7. Показать, что реберные графы $L(K_n)$ и $L(K_{n,m})$ являются регулярными.
8. Доказать, что при $n > 2$ звездный граф $K_{1,n}$ не является реберным графом.
9. Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — степени вершин графа G. Сколько вершин и ребер содержит реберный граф $L(G)$?
10. Доказать, что простой граф изоморфен своему реберному графу тогда и только тогда, когда он является дизъюнктным объединением циклических графов.
11. Привести примеры (когда это возможно)
    1) двудольного графа, являющегося регулярным;
    2) кубического графа с 9 вершинами;
    3) (для каждого n) простого графа с n вершинами и $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребрами;
    4) (для каждого n) простого графа с n вершинами, изоморфного своему реберному графу;
    5) связных графов, являющихся регулярными графами степени 4.
12. Какие из платоновых графов являются двудольными?
13. **[Теорема Кёнига.]** *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину.* Доказать.
14. Доказать, что в непустом двудольном регулярном графе доли содержат равное число вершин.
15. Может ли регулярный степени выше 1 двудольный граф иметь мосты?
16. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Доказать, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.
17. Пусть в графе среди любых четырех вершин найдется вершина, смежная с тремя остальными. Доказать, что радиус графа равен единице.
18. Найти дополнения к графам, соответствующим тетраэдру, кубу и октаэдру.

19. Вычислить:

1) $C_4 + N_2$; 2) $K_n + K_m$; 3) $\overline{K}_{n,m}$; 4) $\overline{G+H}$ (G и H — простые графы).

20. Пусть G, H и K — простые графы; доказать или опровергнуть следующие равенства:

1) $G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K)$;

2) $G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K)$.

21. Найти матрицы смежности графов K_n, N_n и C_n.

22. Чем характерна матрица смежности двудольного графа?

23. Какова связь между матрицами смежности простого графа и его дополнения?

24. Пусть A — матрица смежности регулярного графа степени k. Доказать, что k есть собственное значение матрицы A. Найти отвечающий ему собственный вектор.

25. В графе Петерсена найти циклы длины 5, 6, 8 и 9.

26. В графе Петерсена найти разрезы из 3, 4 и 5 ребер.

27. Доказать, что дополнение к (простому) несвязному графу есть связный граф.

28. Доказать, что реберный граф связного графа связен.

29. Пусть G — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$ и матрицей смежности A. Доказать, что число маршрутов длины k из v_i в v_j равно (i, j)-му элементу матрицы A^k. Показать также, что если G — простой граф, то число *треугольников* (циклов длины 3) в G равно $\operatorname{tr}\dfrac{A^3}{6}$ (где $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ — *след* матрицы A). Верно ли, что число циклов длины 4 равно $\operatorname{tr}\dfrac{A^4}{8}$?

30. Основываясь на результате предыдущей задачи, предложите алгоритм определения диаметра графа по его матрице смежности.

31. **[Экстремальная теорема Турана.]** Пусть G — простой граф с $2n$ вершинами, не содержащий треугольников. Доказать, что в G не более n^2 ребер и привести пример, когда эта верхняя граница достигается.

эта верхняя граница достигается. … графе с $2n+1$ вершинами, не содержащем

32. Найти максимальное число ребер в простом графе с $2n+1$ вершинами, не содержащем треугольников.

33. Найти радиус и диаметр графа Петерсена.

34. Для каждого n построить пример графа, центр которого состоит из n вершин и не совпадает с множеством всех вершин.

35. Пусть а) $n = 4$; б) $n = 5$.

1) Найти цикловой индекс группы подстановок на множестве ребер полного графа с n вершинами, порожденных перестановками вершин.

2) С помощью теоремы Пойа найти число попарно неизоморфных простых графов с n вершинами и m ребрами.

Гамильтоновы и эйлеровы графы

36. Для каких чисел m и n следующие графы являются а) эйлеровыми; б) гамильтоновыми:

1) K_n; 2) $K_{m,n}$; 3) W_n?

37. Привести пример эйлерова графа, не являющегося гамильтоновым, и гамильтонова графа, не являющегося эйлеровым.

38. Пусть G — двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин соответственно. Доказать, что

1) если G — гамильтонов граф, то $m = n$;

2) если G — полугамильтонов граф, то $|m - n| \leqslant 1$.

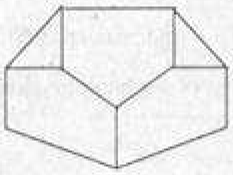

Рис. 34

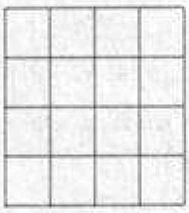

Рис. 35

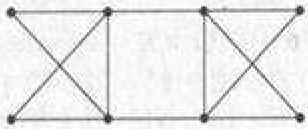

Рис. 36

39. Может ли а) конь; б) король; в) ладья побывать на каждой клетке шахматной доски размером 8×8 ровно один раз и последним ходом возвратиться в исходную позицию? Решить такую же задачу для доски 7×7.

40. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рис. 34) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

41. Доказать, что если граф G связен и имеет $k > 0$ вершин нечетной степени, то минимальное число не имеющих общих ребер цепей, объединение которых содержит каждое ребро графа G, равно $k/2$.

42. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?

43. Можно ли сетку, составленную из единичных квадратов (рис. 35), представить в виде объединения 1) восьми ломаных длины 5; 2) пяти ломаных длины 8?

44. С помощью алгоритма Флери найти эйлеров цикл в графе на рис. 36.

45. Доказать, что реберный граф простого эйлерова графа является одновременно эйлеровым и гамильтоновым.

46. Доказать, что реберный граф простого гамильтонова графа является гамильтоновым.

Деревья

47. Найти все (с точностью до изоморфизма) деревья, в которых не более семи вершин.

48. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

49. Доказать, что каждое дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами?

50. Если в дереве не менее двух ребер, то его радиус меньше диаметра. Доказать.

51. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины, если диаметр дерева есть четное число, и двух вершин в противном случае.

52. Верно ли, что в дереве с нечетным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро?

53. Выразите радиус дерева через его диаметр.

54. Пусть n — количество вершин дерева, r — его радиус. Доказать, что $n \geqslant 2r$.

55. Верно ли, что если диаметр графа равен $k > 2$, то граф имеет стягивающее дерево диаметра k?

56. Для каждого из указанных ниже графов найти какое-нибудь стягивающее дерево и фундаментальную систему циклов относительно него.

1) K_5; 2) $K_{3,3}$; 3) W_5; 4) C_6; 5) граф Петерсена.

57. Пусть T_1 и T_2 — стягивающие деревья связного графа G. Показать, что для любого ребра e из T_1 существует ребро f из T_2 такое, что после «замены» в T_1 ребра e на ребро f вновь получится стягивающее дерево. (С помощью подобной процедуры можно построить последовательность стягивающих деревьев $T_1, \ldots, T_2$, в которой каждое дерево получается из предыдущего заменой одного ребра).

58. Доказать, что число реберно-помеченных деревьев с $n \geqslant 3$ вершинами (в которых помечены не вершины, а ребра) равно n^{n-3}.

59. Показать, что при больших n вероятность того, что случайным образом выбранная вершина дерева с n вершинами является висячей, приближенно равна $1/e$.

60. Найти стягивающее дерево минимального веса для каждого графа на рис. 37.

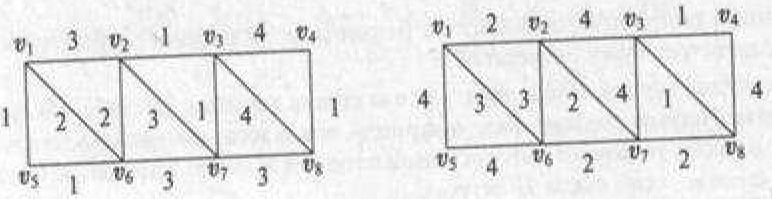

Рис. 37

61. Необходимо построить систему нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов, принадлежащих некоторой компании, с портом (П), куда поступает сырая нефть. Известны (табл. 7) предполагаемые ежегодные затраты на эксплуатацию нефтепровода между соответствующими пунктами.

Таблица 7

	П	1	2	3	4	5	6	7
П	0	5	6	8	2	6	9	10
1	5	0	4	10	5	8	6	10
2	6	4	0	11	8	4	9	10
3	8	10	11	0	10	3	6	7
4	2	5	8	10	0	2	5	9
5	6	8	4	3	2	0	10	5
6	9	6	9	6	5	10	0	8
7	10	10	10	7	9	5	8	0

Найти систему нефтепроводов, позволяющую осуществлять переброску нефти от порта ко всем заводам с минимальными годовыми эксплуатационными затратами.

Корневые деревья

Дерево с выделенной вершиной (**корнем**) *называют* **корневым деревом.**

62. Найти число помеченных корневых деревьев с n вершинами.

В книгах, посвященных исследованию структур данных, корневое дерево определяют рекурсивно следующим образом.

Корневое дерево T *— это непустое конечное множество* T *с элементами, называемыми вершинами, такими, что*

1) *имеется выделенная вершина, называемая корнем данного дерева;*
2) *если множество остальных вершин непусто, то оно разбивается на* m *множеств* $T_1, \ldots, T_m$*, каждое из которых в свою очередь является корневым деревом.*

Деревья $T_1, \ldots, T_m$ называются ***поддеревьями*** *данного корня. Из определения следует, что каждая вершина дерева является корнем некоторого своего дерева. Число поддеревьев дерева с корнем r —* ***порядок*** *вершины r. Вершины нулевого порядка называют* ***листьями****; остальные вершины называют* ***внутренними****.*

63. Сколько листьев имеет дерево с k внутренними вершинами, порядок каждой из которых равен двум?

64. В турнире по олимпийской системе («проигравший выбывает») участвует n человек. Сколько встреч будет проведено?

65. Некто купил курицу. После того, как она снесла два яйца, ее съели. Из яиц вывелись цыплята. Петухов съедали сразу, а куриц — после того, как они сносили по два яйца, и т. д. В какой-то момент вывелись одни петухи, и процесс закончился. Сколько куриц было съедено, если съели 97 петухов?

66. Сколько листьев имеет дерево, в котором (кроме листьев) содержится n_1 вершин порядка 1, n_2 вершин порядка 2, ..., n_s вершин порядка s?

Укладки графов

67. При каком k можно так расположить 6 точек на плоскости и соединить их попарно непересекающимися отрезками, чтобы каждая точка была соединена ровно с k другими?

68. При каких n графы G_n (определение см. в задаче 1) планарны?

69. Проверить формулу Эйлера, связывающую число вершин, ребер и граней плоского графа, для следующих графов:

1) W_n; 2) $K_{2,n}$; 3) графа, соответствующего клетчатому полю $s \times t$.

70. Всегда ли планарен реберный граф планарного графа?

71. Пусть в простом графе G не менее 11 вершин. Доказать, что граф G и его дополнение $\overline{G}$ не могут быть одновременно планарными.

72. Используя тот факт, что в простом плоском графе есть вершина степени не больше 5, доказать, что его вершины можно раскрасить не более чем в 6 цветов так, чтобы смежные вершины были разного цвета.

Ориентированные графы. Алгоритмы

73. Пусть A — матрица смежности орграфа с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Какой смысл имеют суммы строк и суммы столбцов матрицы A? Доказать, что (i, j)-й элемент матрицы A^k равен числу путей длины k из v_i в v_j.

74. В дереве с n вершинами ребра ориентируются случайным образом. Какова вероятность того, что найдется вершина, из которой ведут пути ко всем остальным вершинам?

75. Пусть G — связный граф. Зафиксируем некоторую его вершину v. Доказать, что можно так ориентировать ребра графа, что в получившемся орграфе существует путь от v до любой другой вершины.

Ориентированный граф называют ***сильно связным****, если для любых его вершин u и v существует путь из u в v.*

76. В связном графе степени всех вершин четны. Доказать, что можно так ориентировать ребра графа, чтобы

1) получившийся орграф был сильно связным;
2) для каждой вершины полустепень исхода была равна полустепени захода.

77. В ориентированном графе со связным основанием для каждой вершины полустепень исхода равна полустепени захода. Доказать, что орграф эйлеров.

78. Найти кратчайший путь от 1-й вершины до всех остальных (рис. 38 *а*, *б*).

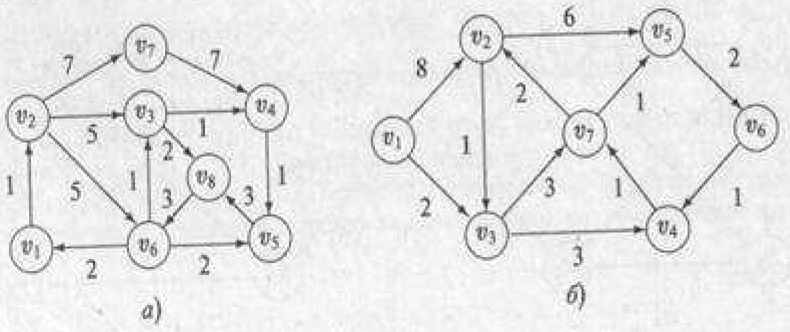

Рис. 38

79. Дана структурно-временная таблица работ по организации выставки-продажи товаров (табл. 8). Требуется построить сетевой график, найти наименьшее время выполнения проекта, определить критический путь, вычислить резервы времени для выполнения каждой операции.

Таблица 8

Этап проекта (элементарная работа)	Обозначение	Опорные работы	Время выполнения
Заказ на оборудование и товары	e_1	—	10
Разработка системы учета спроса	e_2	—	12
Отбор товаров и выписка счетов	e_3	e_1	2
Завоз товаров	e_4	e_3	3
Завоз оборудования	e_5	e_1	5
Установка оборудования	e_6	e_5	6
Выкладка товара	e_7	e_4	6
Учет наличия товара	e_8	e_4	5
Оформление зала и витрины	e_9	e_6, e_7	5
Изготовление документов учета	e_{10}	e_2, e_8	4
Репетиция выставки-продажи	e_{11}	e_9, e_{10}	2

80. Пусть проекты описываются взвешенными графами (рис. 39 *а, б*), где дуги соответствуют операциям (этапам) проекта, а вес дуги обозначает время выполнения соответствующей операции. Найти наименьшее время выполнения проектов, критические пути и резервы времени для выполнения каждой операции.

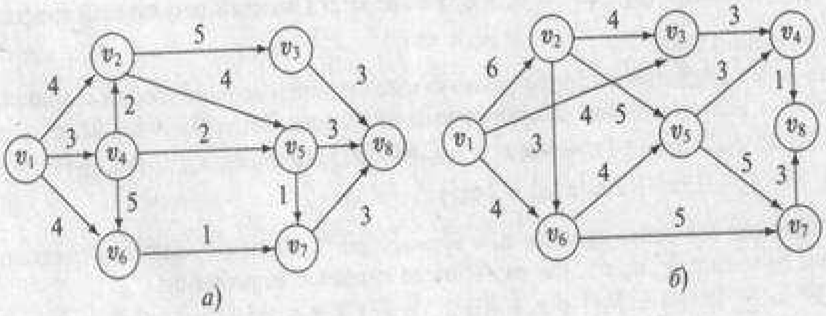

Рис. 39

81. Найти максимальные потоки и минимальные разрезы в транспортных сетях (рис. 40 *а, б*). Число рядом с дугой есть ее пропускная способность.

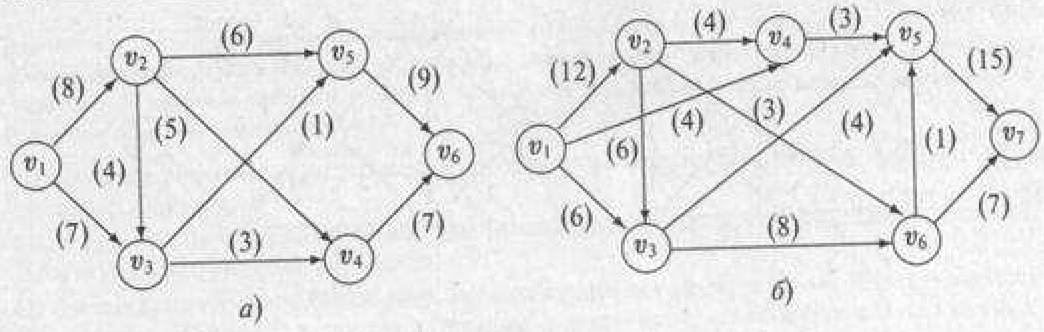

Рис. 40

82. Пусть имеется m неженатых мужчин, n незамужних женщин и k свах. У каждой свахи есть список своих клиентов; между любыми мужчиной и женщиной из этого списка сваха может устроить брак. Для i-й свахи число устроенных ею за год браков не превосходит числа b_i. Перевести задачу нахождения наибольшего числа браков, которые могут устроить свахи за год, в задачу нахождения максимального потока в некоторой сети.