§ 6. Деревья и леса

Граф, не содержащий циклов, называют ***ациклическим*** графом, или *лесом*. Заметим, что в ациклическом графе отсутствуют петли и кратные ребра, в силу чего он является простым графом. *Дерево* — это связный ациклический граф. Таким образом, компоненты связности леса являются деревьями, т. е. лес — дизъюнктное объединение деревьев.

В следующей серии теорем вскрываются важные свойства ациклических графов; при их доказательстве часто будут использоваться леммы из § 2.

Теорема 8. *Граф является лесом тогда и только тогда, когда каждое ребро графа — мост.*

◄ Граф G — лес $\iff$ в G нет циклов $\iff$ ни одно ребро не входит ни в какой цикл $\iff$ (по лемме 1) все ребра G — мосты. ►

Теорема 9. *Дерево с n вершинами содержит $n-1$ ребро.*

◄ Пусть G — дерево с n вершинами. В силу предыдущей теоремы каждое ребро G (и всех его подграфов) является мостом. Будем последовательно удалять ребра G, при этом каждый раз число компонент связности увеличивается на 1 (по лемме 2). Первоначально имелась одна компонента связности (так как дерево — связный граф). После удаления всех ребер граф будет иметь n изолированных вершин, т. е. n компонент связности. Таким образом, в указанной процедуре был выполнен $n-1$ шаг; значит G содержит $n-1$ ребро. ►

Следствие 1. *Пусть в лесе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда $m = n - k$.*

◄ Пусть в i-й компоненте связности леса n_i вершин и m_i ребер $(i = 1, \ldots, k)$; по теореме 9 для каждого i справедливо $m_i = n_i - 1$. Подсчитаем общее число ребер леса:

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k. \ ►$$

Следствие 2. *Если в лесе число ребер на 1 меньше числа вершин, то этот лес является деревом.*

◀ Действительно, в силу следствия 1 число компонент связности леса равно разности числа вершин и числа ребер (в нашем случае — единице). ▶

Объединив формулировки теоремы 9 и следствия 2, получим следующее утверждение: *лес является деревом тогда и только тогда, когда число его ребер на 1 меньше числа вершин.*

Следствие 3. *В дереве, которое содержит по меньшей мере две вершины, не менее двух висячих вершин.*

◀ Пусть в дереве $n \geqslant 2$ вершин: $v_1, \ldots v_n$, тогда оно содержит $m = n - 1$ ребро. По лемме о рукопожатиях

$$\rho(v_1) + \ldots + \rho(v_n) = 2m = 2(n-1).$$

Можно считать, что вершины упорядочены по их степеням:

$$\rho(v_1) \leqslant \rho(v_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho(v_n).$$

Докажем, что $\rho(v_1) = \rho(v_2) = 1$. Предполагая противное, легко получить противоречие: если $\rho(v_2) > 1$, т. е. $\rho(v_2) \geqslant 2$, то

$$2(n-1) = \rho(v_1) + \rho(v_2) + \ldots + \rho(v_n) \geqslant 1 + (n-1)\rho(v_2) \geqslant 1 + 2(n-1). \text{ ▶}$$

Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *В лесе, содержащем хотя бы одно ребро, не менее двух висячих вершин.*

Теорема 9 может быть обращена следующим образом.

Теорема 10. *Пусть в связном графе число ребер на 1 меньше числа вершин. Тогда этот граф — дерево.*

◀ Пусть в графе G n вершин, $m = n - 1$ ребер. По теореме 2 в простом графе $m \geqslant n - k$, где k — число компонент связности. Для рассматриваемого графа $k = 1$ и имеет место равенство $m = n - k$. Отсюда ясно, что граф является простым, так как в противном случае удалив все петли и (лишние) кратные ребра (сделав граф простым), мы уменьшили бы m, не меняя при этом n и k, что привело бы к нарушению упомянутого неравенства. Итак, граф G — простой и для него $m = n - k$. Удаление любого ребра графа приведет к нарушению неравенства $m \geqslant n - k$, если при этом не изменится число компонент связности k; поэтому удаление произвольного ребра изменяет k, то есть каждое ребро графа есть мост, в силу чего (по теореме 8) G — ациклический граф. Так как при этом G по условию связный граф, G — дерево. Теорема доказана. ▶

Теорема 11. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.*

◄ *Необходимость.* Пусть G — дерево. Тогда G — связный граф, и любые две его вершины соединены простой цепью (§ 2), при этом двух различных цепей с таким свойством не может быть, так как их объединение дает цикл, в то время как в дереве циклов нет.

Достаточность. Если в графе любые две вершины соединены цепью, то, как известно, граф является связным. Ацикличность графа также очевидна: если бы в графе был цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по меньшей мере двумя простыми цепями. ►

Теорема 12. *Лес является деревом в том и только в том случае, когда добавление любого ребра приводит к образованию ровно одного цикла.*

◄ Пусть ациклический граф связен. В силу теоремы 11 любые две вершины u и v соединены ровно одной простой цепью. Поэтому добавление ребра uv приводит к образованию цикла, причем ровно одного, так как если бы их образовалось хотя бы два, то объединяя соответствующие «участки» этих циклов, можно было бы построить цикл, не содержащий ребра uv, что противоречило бы ацикличности исходного графа.

Обратно. Если при добавлении ребра uv образуется цикл, то удаляя из этого цикла ребро uv, мы получим цепь, связывающую вершины u и v, значит, любые две вершины графа связаны, т. е. граф связен и является деревом (так как по условию он ациклический). ►