§ 5. Эйлеровы графы

Связный граф называется *эйлеровым*, если в нем существует замкнутая цепь, содержащая все ребра графа; указанную цепь называют при этом *эйлеровым циклом*. Если в приведенных определениях снять требование *замкнутости*, то придем к понятиям *полуэйлерова графа* и *эйлеровой цепи*.

На рис. 15 граф G_1 не является эйлеровым (и даже полуэйлеровым), G_2 — полуэйлеров граф, G_3 — эйлеров.

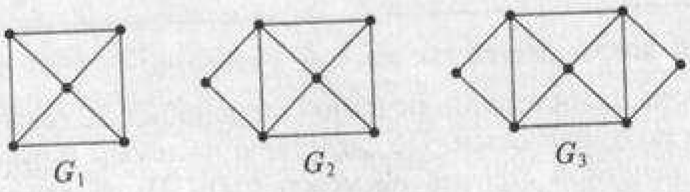

Рис. 15

Узнать, является ли граф эйлеровым, очень просто ввиду следующей теоремы.

Теорема 5 (Л. Эйлер, 1736 г.). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.*

◀ *Необходимость.* Начнем движение по эйлерову циклу с «середины» произвольного ребра и будем подсчитывать (по ходу движения) степени вершин. При прохождении через вершину ее (текущая) степень увеличивается на 2. Поэтому степени всех вершин эйлерова графа четны.
степени всех вершин эйлерова графа четны.

Достаточность. Сначала докажем утверждение, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Лемма. *Пусть все вершины графа имеют четную степень. Тогда через каждую неизолированную вершину графа проходит некоторый цикл.*

◀ Доказательство леммы. Будем строить цикл, исходя из произвольной неизолированной вершины v. Если в графе имеется петля vv, то требуемый цикл уже есть. Пусть теперь vv_1 — произвольное ребро (не являющееся петлей), инцидентное вершине v. Поскольку степень v_1 не меньше двух, существует ребро v_1v_2, отличное от vv_1. Если $v_2 \neq v$, то маршрут $v \to v_1 \to v_2$ можно нарастить некоторым ребром v_2v_3. Из-за четности степени каждой вершины маршрут можно удлинять всякий раз, если попадаем в вершину, отличную от v. В силу конечности множества ребер через конечное число шагов описанной процедуры возникнет замкнутая цепь $v \to v_1 \to \ldots \to v$. ▶

Продолжение доказательства теоремы. Поскольку в данном графе циклы есть, и количество их конечно, существует самый длинный из них. Пусть $C : v \to v_1 \to \ldots \to v$ — цикл наибольшей длины. Нужно доказать, что он содержит все ребра графа. Пусть это не так. Тогда после удаления ребер, составляющих цикл C, возникнет непустой граф G', в котором степени всех вершин по-прежнему четны. Если при этом вершины, через которые проходил цикл C, станут изолированными, то исходный граф не связен, что противоречит условию. Значит, в G' найдется неизолированная вершина w. Согласно лемме, через нее проходит некоторый цикл C', составленный из ребер графа G'. Объединив циклы C и C' (а это возможно, поскольку у них есть общая вершина и нет общих ребер), получим цикл длиннее C — противоречие. ►

Следствие. *Связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин имеют нечетную степень.*

◄ *Необходимость* доказывается так же, как в теореме.

Достаточность. Если вершин нечетной степени нет, то граф является эйлеровым, а, значит, и полуэйлеровым. По следствию из леммы о рукопожатиях ровно одной вершины нечетной степени не может быть. Пусть теперь в графе ровно две вершины имеют нечетную степень. Соединив эти две вершины новым ребром, получим, согласно теореме, эйлеров граф. Построим в новом графе эйлеров цикл; удаление ранее добавленного ребра приводит к эйлеровой цепи в исходном графе. ►

Задача о кенигсбергских мостах

Во времена Леонарда Эйлера семь мостов города Кёнигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как показано на рис. 16. Мог ли житель этого города, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Рассмотрим граф, вершины которого отвечают связным участкам суши (двум берегам реки и двум островам), а ребра — мостам. Все четыре вершины графа имеют нечетную степень, стало быть, ответ к задаче отрицательный.

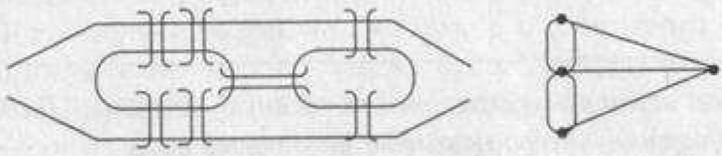

Рис. 16

Приведенное выше доказательство теоремы об эйлеровых графах имеет неконструктивный характер — оно не дает эффективного метода нахождения эйлерова цикла (генерирование всевозможных циклов — явно не лучший способ действий). Приведем один из алгоритмов нахождения эйлерова цикла.

Алгоритм Флери построения эйлерова цикла

1. Начать цикл с произвольной вершины u. Присвоить произвольному ребру uv, инцидентному u, номер 1. Удалить из графа ребро uv, перейти в вершину v.

2. Пусть после k шагов мы находимся в вершине w. Выбрать произвольное ребро wt, причем мост выбирается только в том случае, если нет другой возможности. Ребру wt присвоить номер $k+1$. Удалить из графа ребро wt, перейти в вершину t.

Число шагов в описанном алгоритме совпадает с числом ребер в графе. По окончании работы алгоритма ребра исходного графа будут пронумерованы в порядке их следования в эйлеровом цикле. Докажем *корректность* предложенного алгоритма.

Теорема 6. *Применение алгоритма Флери к произвольному эйлерову графу всегда приводит к построению эйлерова цикла.*

◀ Пусть G — эйлеров граф. Тогда степень каждой его вершины четна. В силу этого алгоритм может закончить свою работу лишь в начальной вершине u, построив при этом некоторый цикл C. Нужно доказать, что цикл C включает в себя все ребра графа G. Если это не так, то после удаления ребер C граф распадается на компоненты связности, хотя бы одна из которых (назовем ее B) содержит ребра. Обозначим через A семейство всех ребер цикла C, инцидентных вершинам B. Пусть a — наибольший номер ребра (полученный в результате работы алгоритма Флери) из A, тогда к моменту удаления данного ребра из графа оно было мостом; однако это противоречит правилу выбора очередного ребра: поскольку в компоненте B степень каждой вершины четна (это легко видеть), то в ней существует цикл, идя по которому (напомним, любое ребро цикла — не мост) можно было избежать преждевременного удаления моста. Корректность алгоритма Флери доказана. ▶

алгоритма Флери доказана. ►

В заключение параграфа отметим, что для *случайным образом* построенного графа вероятность его эйлеровости (при большом числе вершин) мала.

Теорема 7 (Р. Рейд, 1962 г.). *Пусть $P(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, $P_e(n)$ — множество всех простых помеченных эйлеровых графов с n вершинами. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|P_e(n)|}{|P(n)|}=0.$$

◄ Пусть $P_0(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, степень каждой из которых четна. Связные графы из $P_0(n)$ составляют, как известно, $P_e(n)$; поэтому $P_e(n)\subset P_0(n)$ и $|P_e(n)|\leqslant|P_0(n)|$. Каждый граф из $P(n)$ определяется некоторым подмножеством ребер полного графа K_n, содержащего C_n^2 ребер; в силу этого $|P(n)|=2^{C_n^2}$. Нетрудно подсчитать и мощность $P_0(n)$. Установим взаимно однозначное соответствие между $P(n-1)$ и $P_0(n)$: если все вершины нечетной степени произвольного графа из $P(n-1)$ (число их по следствию из леммы о рукопожатиях четно) соединить с n-й вершиной, то получим граф из $P_0(n)$. Таким образом,

$$|P_0(n)|=|P(n-1)|=2^{C_{n-1}^2}.$$

Дальнейшее просто:

$$\frac{|P_e(n)|}{|P(n)|}\leqslant\frac{|P_0(n)|}{|P(n)|}=\frac{2^{C_{n-1}^2}}{2^{C_n^2}}=2^{\frac{(n-1)(n-2)-n(n-1)}{2}}=2^{1-n}.$$

Так как $2^{1-n}\to 0$ при $n\to\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|P_e(n)|}{|P(n)|}=0$. ►