§ 4. Гамильтоновы графы

У. Гамильтон — ирландский математик и астроном — в 1859 году придумал головоломку «Кругосветное путешествие», состоявшую в следующем: каждой вершине додекаэдра приписано имя известного города; необходимо по ребрам проложить замкнутый путь, который проходил бы через все города, причем каждый город должен встретиться ровно один раз. В честь Гамильтона графы, в которых существуют маршруты с подобным свойством, были названы гамильтоновыми.

Перейдем к точным определениям. Граф G — *гамильтонов*, если в нем существует простая замкнутая цепь, проходящая через все вершины графа; указанную цепь называют при этом *гамильтоновым циклом*. Если в приведенных определениях отказаться от требования *замкнутости*, то придем к понятиям *полугамильтонова графа* и *гамильтоновой цепи*.

На рис. 14 граф G_1 не является гамильтоновым (и даже полугамильтоновым), G_2 — полугамильтонов граф, G_3 — гамильтонов.

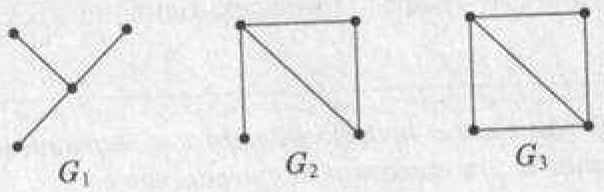

Рис. 14

Приведем примеры задач, сводящихся к нахождению гамильтоновых циклов в графе.

1) *На обед за круглым столом приглашены гости. Требуется рассадить их так, чтобы сидящие рядом были в дружеских отношениях.*

чтобы сидящие рядом были в дружеских отношениях.

Рассмотрим граф, в котором вершины — гости, а наличие ребра, соединяющего вершины u и v, говорит о «дружбе» между u и v. Гостей следует рассадить за круглым столом в таком порядке, чтобы соответствующие им вершины были последовательными вершинами некоторого гамильтонова цикла.

2) **Задача Эйлера о коне.** *Обойти ходом коня шахматную доску, посетив при этом каждую клетку ровно один раз и последним* (64-*м*) *ходом вернуться в начальную клетку.*

Здесь граф содержит 64 вершины (клетки доски). Две вершины соединяются ребром, если возможен ход коня с одной клетки в другую. Степени вершин варьируются от 2 до 8. Эта задача достаточно широко описана в занимательной математической литературе. Есть что-то притягательное в задаче Эйлера о коне, если даже на студенческих партах можно встретить наряду с традиционными жанрами «наскального изобразительного искусства» изображения шахматной доски, клетки которой пронумерованы в соответствие с маршрутом коня!

3) **Задача коммивояжера.** *Бродячий торговец*[7] (*коммивояжер*) *должен посетить* n *пунктов. Известна стоимость проезда между любыми двумя пунктами. Требуется выбрать наиболее «дешевый» замкнутый путь, проходящий через все пункты.*

---

[7] В англоязычной литературе для задачи коммивояжера используется термин Traveling salesman problem (TSP).

Вместо стоимости проезда можно говорить, конечно, о времени или расстоянии. В любом случае, каждому ребру графа приписан некоторый «вес»; задача состоит в нахождении гамильтонова цикла минимального веса (*вес цикла* — сумма весов составляющих его ребер). Задача коммивояжера является классической задачей дискретной оптимизации, относится к классу так называемых NP-полных задач.

Обозначим через $P(n)$ множество всех простых помеченных графов с n вершинами, а через $P_h(n)$ — множество всех простых помеченных гамильтоновых графов с n вершинами. В 1969 г. советский математик В. А. Перепелица доказал, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|P_h(n)|}{|P(n)|} = 1.}$$

Таким образом, вероятность того, что «случайный» граф с n вершинами является гамильтоновым, стремится к единице с ростом n. Не установлено простых критериев гамильтоновости графа. Приведем одно из достаточных условий гамильтоновости.

Теорема 4 (О. Оре, 1960 г.). *Если в простом графе с* n *вершинами* ($n \geqslant 3$) *для любой пары несмежных вершин* u *и* v *выполняется неравенство*

$$\rho(u) + \rho(v) \geqslant n,$$

то граф является гамильтоновым.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть G — простой негамильтонов граф, содержащий $n \geqslant 3$ вершин, в котором несмежные вершины u и v соединяет гамильтонова цепь. Тогда*

$$\rho(u) + \rho(v) \leqslant n - 1.$$

◀ Доказательство леммы. В гамильтоновой цепи $u \to \ldots \to v$, где вершины u и v не смежны, произвольная вершина, смежная с u (обозначим ее u'), не может следовать за вершиной (например, v'), смежной с v. Действительно, гамильтонова цепь $u \to \ldots \to v' \to u' \to \ldots \to v$ легко преобразуется в гамильтонов цикл $u \to \ldots \to v' \to v \to \ldots \to u' \to u$. Поэтому число вершин, не смежных с u, не меньше числа вершин, смежных с v, то есть $n - 1 - \rho(u) \geqslant \rho(v)$, или $\rho(u) + \rho(v) \leqslant n - 1$. ▶

◀ Доказательство теоремы 4. Предположив, что граф не является гамильтоновым, будем последовательно добавлять к нему ребра до тех пор, пока он не станет гамильтоновым. Удалив последнее добавленное ребро uv, получим полугамильтонов граф G', не являющийся гамильтоновым. В нем существует гамильтонова цепь $u \to \ldots \to v$, причем вершины u и v не смежны. Применение леммы дает: $\rho'(u) + \rho'(v) \leqslant n - 1$, где $\rho'(u)$, $\rho'(v)$ — степени вершин u и v в графе G'. Осталось заметить, что $\rho'(u) \geqslant \rho(u)$, $\rho'(v) \geqslant \rho(v)$, откуда $\rho(u) + \rho(v) \leqslant \rho'(u) + \rho'(v) \leqslant n - 1 < n$. Получено противоречие с условием. ▶

Следствие (Г. Дирак, 1952 г.). *Если в простом графе порядка $n \geqslant 3$ степень каждой вершины не меньше $n/2$, то граф является гамильтоновым.*