§ 3. Метрические характеристики графа

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — связный граф. Через $d(u, v)$ обозначим длину кратчайшей цепи, связывающей вершины u и v. Покажем, что $d(u, v)$ обладает свойствами *метрики*.

Симметричность.

$$\forall\, u, v \in V \quad d(u, v) = d(v, u).$$

Свойство очевидно.

Неравенство треугольника.

$$\forall\, u, v, w \in V \quad d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v).$$

Действительно, объединив кратчайшие цепи из u в w и из w в v, получим маршрут из u в v длиной $d(u, w) + d(w, v)$, длина кратчайшей цепи из u в v будет не более этой величины.

Невырожденность.

$$\forall\, u, v \in V \quad d(u, v) \geqslant 0; \quad d(u, v) = 0 \iff u = v.$$

Непосредственно вытекает из определения $d(u, v)$.

Таким образом, на множестве вершин связного графа введена структура *метрического пространства*. $d(u, v)$ будем называть *расстоянием* между вершинами u и v.

Эксцентриситетом вершины u называется наибольшее из расстояний от u до других вершин графа:

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

Минимальный эксцентриситет вершин графа называют *радиусом графа*:

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u),$$

а максимальный эксцентриситет — *диаметром*:

$$d(G) = \max_{u \in V} e(u).$$

Другими словами, диаметр графа — это наибольшее из расстояний между двумя вершинами графа. Если эксцентриситет вершины совпадает с радиусом графа, то вершину называют *центральной*. Центральные вершины графа составляют его *центр*. Вершина называется *периферийной*, если ее эксцентриситет равен диаметру графа.

Несколько примеров. В полном графе K_n $(n > 1)$ расстояние между любыми двумя (разными) вершинами равно 1, поэтому $r(K_n) = d(K_n) = 1$. В полном графе каждая вершина является и периферийной, и центральной.

Последнее свойство имеет место и для циклического графа C_n, для которого радиус также совпадает с диаметром:

$$r(C_n) = d(C_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$$

($[\cdot]$ — обозначение целой части).

Для колеса W_n радиус равен единице, а диаметр — двум, одна вершина является центральной, а остальные — периферийные.

Установим соотношения между радиусом и диаметром графа.

Теорема 3. *Для произвольного графа G справедливы неравенства:*

$$r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G).$$

◄ Первое неравенство следует непосредственно из определений:

$$r(G) = \min_u e(u) \leqslant \max_u e(u) = d(G).$$

Чтобы доказать второе неравенство, положим:

$$d(u, v) = d(G); \quad e(w) = r(G).$$

Применяя неравенство треугольника, получим:

$$d(G) = d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \leqslant e(w) + e(w) = 2r(G).$$

Теорема доказана. ►