§ 2. Связные графы

Маршрутом в графе называется последовательность ребер вида

$$v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m.$$

Каждому маршруту соответствует последовательность его вершин $v_0, v_1, \ldots, v_m$; v_0 называют *начальной вершиной* маршрута, а v_m — *конечной вершиной*; при этом

говорят о *маршруте из v_0 в v_m*. Маршрут удобно обозначать в следующем виде:

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m.$$

Длиной маршрута называется число входящих в него ребер. *Тривиальный маршрут* имеет длину 0 (он не содержит ребер и определяется начальной вершиной v_0).

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины различны, за исключением, может быть, начальной и конечной. Если в цепи $v_0 = v_m$, то цепь называют *замкнутой*.

Цикл в графе — замкнутая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро.

Две вершины графа u и v назовем *связанными*, если в графе существует маршрут из u в v. Заметим, что если две вершины связаны, то существует соединяющая их простая цепь. Действительно, пусть имеется некоторый маршрут из u в v, не являющийся простой цепью, тогда найдется вершина маршрута w, встречающаяся в нем не менее двух раз, и маршрут имеет вид:

$$u \to \ldots \to w \to w_1 \to \ldots \to w \to \ldots \to v.$$

Удалив из маршрута участок $w_1 \to \ldots \to w$, вновь получим маршрут из u в v. Если при этом он не будет простой цепью, то указанную процедуру можно повторить. Бесконечное число раз она выполняться не будет, так как число ребер графа конечно. В результате получим простую цепь из u в v.

Отношение связанности на множестве вершин графа является отношением эквивалентности. Рефлексивность проистекает из того факта, что каждая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом. Симметричность следует из того, что взяв вершины маршрута из u в v в обратном порядке, получим маршрут из v в u. Транзитивность также очевидна: объединив маршруты из u в v и из v в w, получим маршрут из u в w.

получим маршрут …

Отношение связанности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности. Очевидно, что вершины из одного класса эквивалентности вместе с соединяющими их ребрами образуют компоненту связности графа (определение которой дано в конце предыдущего параграфа). Поскольку связный граф характеризуется тем, что имеет одну компоненту связности, приходим к выводу: *граф является связным тогда и только тогда, когда любые две его вершины — связанные.*

Разделяющим множеством графа называется такое множество его ребер, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности графа. *Разрез* — минимальное разделяющее множество (т. е. такое, что никакое его собственное подмножество не является разделяющим множеством). Ребро называется мостом, если оно образует разрез.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 12, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — разделяющее множество (но не разрез); $\{e_1, e_2\}$ — разрез; ребра e_6 и e_{10} являются мостами.

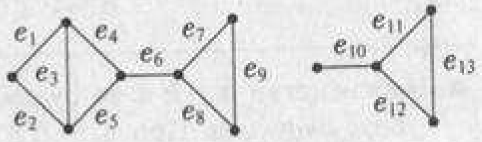

Рис. 12

Лемма 1. *Ребро в графе является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.*

◄ Пусть ребро $e = uv$ — мост. Ясно, что при этом $u \neq v$. Предположим существование цикла, содержащего ребро e. Возьмем две произвольные вершины x

и y из той компоненты связности графа, которой принадлежит ребро e. Покажем, что они останутся связанными и после удаления ребра e. Действительно, если ребро e входит в некоторый маршрут, соединяющий x и y, то e можно заменить последовательностью ребер, составляющих вместе с e цикл (рис. 13). Таким образом, отношение связанности не меняется после удаления e, что противоречит определению моста.

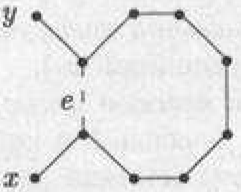

Рис. 13

Обратно. Пусть ребро $e = uv$ не входит ни в один цикл. Если при удалении e вершины u и v останутся связанными, это будет говорить о существовании соединяющей их простой цепи. Объединив ее с ребром e, получим цикл в исходном графе — противоречие! Таким образом, число компонент связности при удалении e увеличивается; e — мост. ►

Следующее утверждение уточняет понятие моста.

Лемма 2. *Удаление моста увеличивает число компонент связности графа на единицу.*

◄ Пусть $e = uv$ — мост. Рассмотрим компоненту связности, содержащую e. Через H_u обозначим множество ее вершин x, для которых существует маршрут из x в u, не содержащий ребра e. Остальные вершины составят множество H_v. Эти множества не пусты, так как $u \in H_u$ (вершина u связана сама с собой тривиальным маршрутом) и $v \in H_v$ (если бы существовал маршрут из v в u, не содержащий ребра e, то добавив к нему это ребро, получили бы цикл, что противоречит лемме 1). Удалим из графа ребро e. Любые две вершины x, y из H_u

останутся связанными между собой маршрутом вида $x \to \ldots \to u \to \ldots \to y$. Для произвольных вершин z, t из H_v любые простые цепи, связывающие их с вершиной u в исходном графе, заканчивались ребром $e = vu$; значит, после удаления этого ребра z и t связаны маршрутом вида $z \to \ldots \to v \to \ldots \to t$. Таким образом, удаление e привело к образованию двух компонент связности (с множествами вершин H_u и H_v). Лемма доказана. ►

Теорема 2. *Пусть в простом графе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда справедливы неравенства*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

◄ Неравенство $n - k \leqslant m$ будем доказывать индукцией по числу ребер.

База индукции. При $m = 0$ имеем $n = k$ — неравенство выполняется.

Индукционный шаг. Предположим, что доказываемое неравенство справедливо для всех графов с s ребрами, где $s < m$. Будем в графе с n вершинами, m ребрами и k компонентами связности последовательно удалять ребра так, чтобы не изменялось число компонент связности, до тех пор, пока это возможно. В результате получим граф с прежним количеством вершин и компонент связности и $m' \leqslant m$ ребрами, причем каждое ребро будет мостом. Удалим еще одно ребро. В силу леммы 2 число компонент связности станет равным $k + 1$. Так как граф будет иметь $m' - 1 \leqslant m - 1 < m$ ребер, к нему применимо предположение индукции: $n - (k+1) \leqslant m' - 1$. Стало быть, $n - k \leqslant m'$, и так как $m' \leqslant m$, то $n - k \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы оценить сверху число ребер графа через число его вершин и компонент связности, дополним каждую компоненту связности графа до полного графа. Граф после этого будет представлять собой дизъюнктное объединение полных графов $G_1 \cup \ldots \cup G_k$. Пусть в i-й компоненте n_i вершин $(i = 1, \ldots, k)$. Можно ли еще увеличить число ребер, не меняя при этом числа вершин и компонент связности? Можно, если найдутся две компоненты, в каждой из которых не менее двух вершин. Пусть $2 \leqslant n_i \leqslant n_j$. «Отберем» одну вершину у G_i (потеряв при этом $n_i - 1$ ребер) и «передадим» ее графу G_j (приобретя зато n_j ребер). Количество ребер увеличится на величину $n_j - (n_i - 1) = n_j - n_i + 1 \geqslant 1$. Повторяя описанную процедуру, пока это возможно, придем в конце концов к графу с $k - 1$ изолированными вершинами и компонентой связности, представляющей собой полный граф с $n - k + 1$ вершинами. Полученный граф имеет $\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ ребер. Поскольку при каждом проведенном преобразовании число ребер возрастало, получим требуемое соотношение: $m \leqslant \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$; причем равенство достигается только для дизъюнктного объединения полного графа и пустых графов. ►

Следствие. *Если в простом графе n вершин и m ребер и $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то граф связен.*

◄ Действительно, если бы граф не был связен и число его компонент $k \geqslant 2$, то число ребер удовлетворяло бы неравенству

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

что противоречит условию. ►