Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\varphi : V_1 \to V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $u, v \in V_1$ число соединяющих их ребер равно числу ребер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(u), \varphi(v)$. На рис. 4 изображены изоморфные графы (соответствующие друг другу вершины в них обозначены одинаковыми номерами).

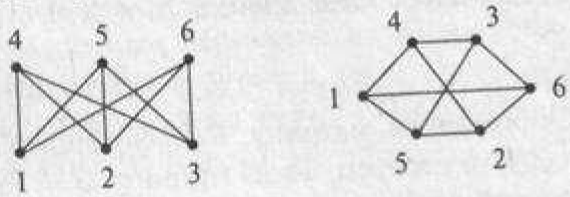

Рис. 4

Ясно, что в изоморфных графах одинаковое число вершин, ребер (а также петель и кратных ребер). Однако данное условие не является достаточным для изоморфности. Два графа, изображенные на рис. 5, не являются изоморфными (хотя бы потому, что в одном графе имеется «треугольник», а во втором — нет).

Отношение изоморфизма графов обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности.

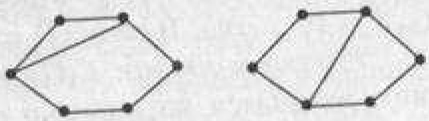

Рис. 5

Граф $G' = \langle V', E' \rangle$ называют *подграфом* графа $G = \langle V, E \rangle$ (обозначение $G' \subset G$), если $V' \subset V$, $E' \subset E$. Заметим, что если G_1 и G_2 — изоморфные графы, то для любого подграфа G_1 найдется изоморфный ему граф, являющийся подграфом G_2.

Порядок графа — число его вершин. Граф порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены *метки* — числа от 1 до n (причем у разных вершин — разные метки). Часто мы будем отождествлять вершину с ее меткой. *Матрицей смежности* помеченного графа называется матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — число ребер, соединяющих вершины i и j. На рис. 6 изображен помеченный

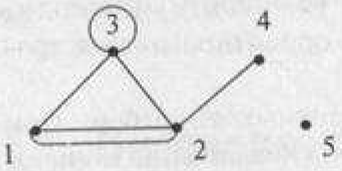

Рис. 6

граф 5-го порядка и приведена его матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы смежности

1) Каждый элемент матрицы — неотрицательное целое число.
2) Матрица является симметричной: $A^T = A$ (символ ^{T} означает операцию транспонирования).
3) Сумма элементов i-й строки равна степени вершины i:

$$\boxed{\sum_j a_{ij} = \rho(i).}$$

4) Пусть A и A' — матрицы смежности изоморфных графов. Тогда найдется такая матрица перестановок[4)] P, что

$$\boxed{A' = PAP^{-1}.}$$

Первые три свойства очевидны; докажем последнее свойство. Пусть φ — функция, устанавливающая изоморфное соответствие между графами G' и G с матрицами смежности соответственно A' и A:

$$\forall\, i, j \quad a'_{ij} = a_{\varphi(i),\varphi(j)}. \tag{1}$$

Сформируем матрицу P следующим образом: в i-й строке поставим единицу в $\varphi(i)$-й столбец. Тогда матрица $B = PA$ получается из матрицы A такой перестановкой ее строк, что i-й строкой становится строка с номером $\varphi(i)$ матрицы A ($i = 1, \ldots, n$; n — порядок графа). Легко проверить, что матрица, обратная к матрице перестановок, совпадает с транспонированной к ней: $P^{-1} = P^T$. Матрица $BP^T = PAP^{-1}$ получается из матрицы B такой перестановкой ее столбцов, что j-м столбцом становится столбец с номером $\varphi(j)$ матрицы B ($j = 1, \ldots, n$). Таким образом, число, стоящее в i-й строке и j-м столбце матрицы PAP^{-1}, совпадает с числом, которое находится в $\varphi(i)$-й строке и $\varphi(j)$-м столбце матрицы A ($i, j = 1, \ldots, n$). В силу (1) отсюда и вытекает требуемое: $A' = PAP^{-1}$.