ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ

История становления теории графов интересна и поучительна.

Первая известная публикация была ответом на головоломку, подобную тем, которыми в разное время любили скрашивать свой досуг. Отнесясь к вопросу, поставленному в письме коллеги (о том, как именно можно пройти по семи мостам славного города Кёнигсберга) вполне серьезно, Леонард Эйлер, как он сам писал позже в одном из своих писем, «после долгих размышлений нашел простое правило», позволившее ему решить предложенную и значительно более сложные задачи, придуманные им самим. Однако несмотря на стремительно нарастающий научный авторитет Эйлера, эта публикация (*Euler L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes, Commentarii Academiae Petropolitanae. 8. 1736. P. 128–140) не привлекла внимания ни современных ему ученых, ни нескольких последующих поколений исследователей. Во всяком случае никаких следов проявления интереса к заявленной проблематике до 1856 года не замечено.

Придуманная тогда Уильямом Гамильтоном игрушка в виде утыканного гвоздиками деревянного додекаэдра также долгое время оставалась предметом досужих размышлений, и никто не думал, что через несколько десятков лет две эти развлекательные задачи займут достойное место в востребованной ныне теории графов (сам этот термин появился лишь в 1936 году).

Конечно, этой востребованности в немалой степени способствовали серьезные работы Густава Кирхгофа по исследованию электрических цепей и Артура Кэли при описании строения углеводородов, а также заметно увеличившийся
Кэли при описании строения углеводородов,
поток задач, возникавших в различных областях науки и техники.

Оказалось, что при помощи графов можно вполне успешно моделировать и решать самые разнообразные задачи.

Все это потребовало обоснований, необходимость построения которых вылилась в новую теорию. Не были забыты ни Эйлер, ни Гамильтон. Их имена носят графы с весьма интересными свойствами.

Так и возникли два естественных направления работы с графами:

- первое — изучение свойств собственно графов (терминология, утверждения, доказательства, формулы, т. е. все, как и положено в любой математической теории),
- второе — применение графов в других науках и в прикладных задачах (вот только некоторые из них: деревья вероятностей и деревья решений, сетевые задачи: оценка временных затрат на выполнение больших проектов и пропускной способности различных коммуникаций, поиск кратчайших маршрутов и др.).

В этой небольшой главе мы постарались уделить внимание обоим из указанных направлений.

§ 1. Определения и примеры

Простым графом называется упорядоченная пара $G = \langle V, E\rangle$, где V — непустое конечное множество (элементы V — *вершины* графа); E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов V (элементы E — *ребра*[1] графа).

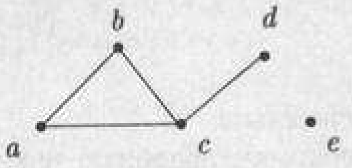

Рис. 1

Графы удобно представлять рисунками, в которых вершины изображаются точками, а ребра — линиями, соединяющими соответствующие точки[2]. Например, на рис. 1 изображен простой граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер

$$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}.$$

Граф — упорядоченная пара $G = \langle V, E\rangle$, где V — непустое конечное множество (элементы V — *вершины* графа); E — конечное *мультимножество* неупорядоченных пар элементов V (необязательно различных) (элементы E — *ребра*).

Термин *мультимножество* говорит о том, что элементы в E могут повторяться; повторяющиеся элементы называют *кратными ребрами*.

Если в графе имеется ребро $e = uv$, то говорят:

вершины u и v — *смежные*, или

ребро e *инцидентно* вершинам u и v; вершины u и v *инцидентны* ребру e, или

ребро e *соединяет* вершины u и v, или

вершины u и v — *концы* ребра e.

Два различных ребра называются *смежными*, если они имеют по крайней мере одну общую вершину. На рис. 2 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством ребер E: ab, ac, ac, bc, bb, cd.

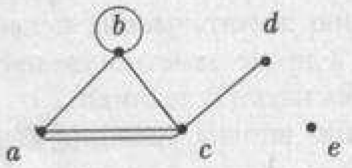

Рис. 2

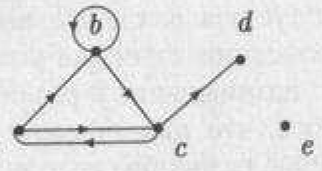

Рис. 3

Ребро вида uu (соединяющее некоторую вершину саму с собой) называют *петлей*. Таким образом, простой граф — это граф без петель и кратных ребер.

Ориентированный граф — упорядоченная пара $G = \langle V, A\rangle$, где V — непустое конечное множество — множество вершин; A — конечное мультимножество *упорядоченных* пар элементов V (необязательно различных) — мультимножество *дуг*[3].

---

[1] Поясним выбор обозначений для множеств вершин и ребер. По-английски вершина — vertex, ребро — edge.

[2] Сам термин *граф* возник как сокращение слова graphic (график) и был введен в 1936 г. венгерским математиком Д. Кёнигом.

[3] A — первая буква слова arc — дуга (англ.).

На рис. 3 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством дуг A: (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, d). К ориентированным графам мы вернемся лишь в конце данной главы.

Степенью вершины графа называется число инцидентных ей ребер. При подсчете степени вершины петлю будем учитывать дважды. Обозначение степени вершины v: $\rho(v)$. Вершина v называется *изолированной*, если $\rho(v) = 0$, и *висячей*, если $\rho(v) = 1$. Имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 1 (лемма о рукопожатиях). *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер*:

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|E|.$$

Действительно, каждое ребро дает вклад 2 при подсчете суммы степеней всех вершин. В частности, если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число рукопожатий будет четным (графовая модель для данной задачи очевидна).

Следствие. *В любом графе число вершин нечетной степени четно.*